DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mehr denken als rechnen – Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Anna Elisabeth Ebersdorfer
Matrikel-Nummer:	0303419
Studienrichtung:	A 190 344 306 Lehramtsstudium für die Unterrichtsfächer Mathematik und Englisch
Betreuerin / Betreuer:	Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Manfred Kronfellner

Wien, im Juli 2011

Inhalt

1. Einleitung

„Mathematik – Wer braucht das schon?“ Dieser Frage begegnet jede Mathematiklehrerin bzw. jeder Mathematiklehrer früher oder später in ihrer bzw. seiner Karriere. Es ist allerdings oft sehr schwierig den Schülerinnen und Schülern zu erklären, warum Mathematik wichtig für ihr tägliches Leben ist. Viele Beispiele sind so abstrakt, dass sie einfach nicht in den Alltag eines Jugendlichen passen (Maaß 2007: 11). Diverse Textbeispiele sind so konstruiert, dass sie, obwohl versucht wird, themenmäßig das Interesse der Lernenden anzusprechen, einfach unrealistisch wirken. Es ist also wichtig, den Unterricht so zu gestalten, dass eine Balance zwischen dem Erlernen mathematischer Kompetenzen und dem Realitätsbezug besteht. Man muss akzeptieren, dass dies leider nicht in allen Bereichen der Mathematik möglich ist. Aber die Bereiche, die den Bezug zum Alltag zulassen, kann man mit Hilfe von Fermi-Aufgaben lebendiger gestalten. Dieser Aufgabentyp weicht grundsätzlich von den gewohnten Schulbuchbeispielen, die meist ergebnisorientiert sind, ab und fordert die Schülerinnen und Schüler heraus, ihr eigenes bestehendes Wissen einzubauen, (neue) Lösungswege zu finden und selbstständig zu arbeiten (vgl. Herget, Jahnke, Kroll 2009: 6 ff)

In den folgenden Kapiteln soll die Herkunft, die Wichtigkeit und auch die Vielseitigkeit von Fermi-Aufgaben aufgezeigt werden. Es soll vermittelt werden, wie der Unterricht durch ihren Einsatz bereichert werden kann und wie Lehrplan und Bildungsstandards dazu stehen. Im Zuge dessen wird auch eine Aufgabensammlung mit ausgewählten Aufgaben zu finden sein. Diese Beispiele werden ausgearbeitet und nehmen Bezug auf mögliche Situationen, in denen sie eingesetzt werden können.

2. Enrico Fermi und seine Aufgaben

2.1. Ein kurzer Einblick in das Leben des Enrico Fermi

Der Kernphysiker Enrico Fermi war einer der größten und bedeutendsten italienischen Wissenschaftler des 20. Jahrhunderts. Seine theoretischen aber auch praktischen Entdeckungen und Berechnungen haben noch heute großen Einfluss in den Bereichen Mathematik, Physik, Chemie und Ingenieurwesen (vgl. Bernardi und Bonolis 2001: 1).

Enrico Fermi wurde am 29. September 1901 in Rom als drittes Kind von Alberto und Ida De Gattis geboren. Der Beruf seines Vaters als Angestellter im Ministerium für Verkehr brachte Fermi früh mit dem Ingenieurwesen in Kontakt. Dadurch stellte sich schon in Fermis frühen Jahren heraus, dass er eine außergewöhnliche Gabe für Mathematik hatte. Er las bereits in jungen Jahren Hochschulbücher und befasste sich auch außerhalb der Schule mit wissenschaftlichen Problemen (vgl. Bernardi und Bonolis 2001: 24). Diese Begeisterung teilte er mit einem gleichaltrigen Schulfreund, Enrico Persico, der ihn als einen Schüler beschreibt, der weit über dem Intelligenzniveau jener Schüler stand, die er selbst als sehr intelligent einschätzte.

Auch nach ihrer gemeinsamen Schulzeit, als sich Enrico Fermi 1918 an der Universität von Pisa einschrieb, hielten die beiden Kontakt. Enrico Persico berichtet, dass Fermi sich nicht nur mit den vorgeschriebenen Kursen zufrieden gab, er beschäftigte sich auch außerhalb mit wissenschaftlichem Arbeiten, vor allem im Bereich mathematische Physik, was dazu führte, dass Fermi schon bald seine eigenen Arbeiten veröffentlichte beziehungsweise bereits verfasste Werke neu bearbeitete (vgl. Bernardi und Bonolis 2001: 37).

Nachdem Enrico Fermi seinen Abschluss machte, kehrte er nach Rom zurück, um dort eine Assistenzprofessur am Institut für Physik anzutreten. Des Weiteren unterrichtete er an der Universität von Florenz. In dieser Zeit beschäftigte er sich vor allem mit Quantenmechanik und Quantenstatistik. Erst 1934 wandte sich Fermi, angeregt durch die Entdeckung des Neutrons, der Experimentalphysik zu. Seine Forschungsarbeit an Neutronen bescherte ihm

1938 den Nobelpreis für Physik. In diesem Jahr verließ Enrico Fermi mit seiner Frau, die er 1928 geheiratet hatte, aus politischen Gründen Italien und emigrierte in die Vereinigten Staaten von Amerika (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi).

Enrico Fermi forschte und unterrichtete zuerst an der Columbia University in New York und anschließend an der University of Chicago. Dort gelang ihm gemeinsam mit anderen Wissenschaftlern eine Kernspaltungskettenreaktion. Nach einer zweijährigen Forschungsperiode in Los Alamos, kehrte Fermi wieder nach Chicago zurück. Er verstarb am 28. November 1954 im Alter von 53 Jahren an Magenkrebs (vgl. Bernardi und Bonolis 2001: 42).

Enrico Fermi galt als geborener Lehrer. Er hatte die Fähigkeit, Probleme auf das Wesentlichste zu minimieren und anschließend zu lösen. Dafür nutzte er meist Abschätzungen, die den Forschungsergebnissen und exakten Berechnungen äußerst nahe kamen. So untersuchte er, zum Beispiel, wie Papierschnipsel von der Druckwelle eines Atombombentests weggeblasen wurden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller *Die Fermibox 8. – 10. Klasse*: 2).

Er nützte seinen Blick für das Essentielle nicht nur für sich selbst, sondern versuchte, ihn an seine Studentinnen und Studenten weiterzugeben. Er versammelte eine ausgewählte Gruppe von Interessierten um sich herum und diskutierte mit ihnen noch ungelöste Probleme, die er meist aus aktuellen Themen herausfilterte (vgl. Bernardi und Bonolis 2001: 42). Er stellte seinen Schülern kurze und prägnante Fragen. Die bekannteste ist wohl jene: Wie viele Klavierspieler gibt es in Chicago? Sie gilt auch als Paradebeispiel für die sogenannten *Fermi-Fragen*.

2.2. Was genau versteht man unter Fermi-Fragen?

Wie bereits in dem vorangegangenen Kapitel erwähnt, war Enrico Fermi, der Namensgeber der Fermi-Fragen, dafür bekannt, Probleme abzuschätzen und zu diskutieren. Diese Eigenschaft liegt auch diesem mathematischen Aufgabentyp zugrunde.

Somit bezeichnet man Fermi-Aufgaben als *„eine quantitative Abschätzung für ein Problem, zu dem zunächst praktisch keine Daten verfügbar sind“* (http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem). Bei Greefrath werden sie als *„offene Aufgaben mit klarem Endzustand aber unklarem Anfangszustand sowie unklarer Transformationen, bei denen die Datenbeschaffung – meist durch mehrfaches Schätzen – im Vordergrund steht*“ definiert (2010: 80). Fermi-Aufgaben bestehen in den meisten Fällen nur aus einem Satz beziehungsweise einer Frage. Um eine Lösung für sie zu finden, muss man das Umfeld des Problems betrachten und kann somit indirekt zu einem Ergebnis kommen. Die Arbeit mit Fermi-Aufgaben, z.B. im Mathematikunterricht, setzt voraus, dass die man selbst recherchiert, um sich Daten zu beschaffen, bzw. dass man seinen gesunden Menschenverstand einsetzt und aus dem Alltag bekannte Informationen anwendet (vgl. www.rechenbaer.de).

Eine weitere Charakteristik von Fermi-Problemen ist die Tatsache, dass es, aufgrund der Offenheit der Fragestellung, keine exakte Lösung gibt. Dadurch, dass das Lösen der Fragen auf Abschätzungen basiert, die von Person zu Person verschieden sein kann, erhält man im Endeffekt viele verschiedene Lösungen. Aus diesem Grund ist es von besonderer Wichtigkeit, dass die Annahmen und Daten, die verwendet werden, ausreichend begründet werden. Kurz zusammengefasst, es gibt keine allgemeingültige Lösung zu einer Frage. Somit kann diese Art von Beispielen nie mit richtig oder falsch bewertet werden. Stattdessen muss beachtet werden, ob die Abschätzungen realistisch gewählt wurden und ob diese sinnvoll sind oder nicht. Es wird also nicht bewertet, ob eine Person gut rechnen kann, sondern wie gut er oder sie argumentieren, begründen, diskutieren und abschätzen kann (vgl. www.rechenbaer.de).

Um die Besonderheit von Fermi-Aufgaben zu demonstrieren, soll das wohl bekannteste Problem und seine Lösung hier aufgezeigt werden:

Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?

In Chicago lebten im Jahr 2010 laut Wikipedia rund 2,6 Millionen Menschen. Um die Rechnung zu vereinfachen kann man mit **drei Millionen** rechnen.

Außerdem leben in einem Haushalt durchschnittlich **zwei Personen** und jeder **zwanzigste** besitzt ein Klavier. Wer sein Klavier regelmäßig stimmen lässt, tut dies meist **ein Mal im Jahr**, was mit Anfahrtszeit des Klavierstimmers **zwei Stunden** dauert. Arbeitet der Klavierstimmer **acht Stunden am Tag**, **fünf Tage** die Woche und **40 Wochen im Jahr**, kommt man schlussendlich zu folgender Berechnung:

Zuerst untersucht man die Zahl der zu stimmenden Klaviere:

3000000/(2* 20*1) = 75000 Klaviere

Danach berechnet man die Arbeit eines Klavierstimmers pro Jahr:

40*5*8/2 = 800 Klaviere

Also erhält man:

75000/ 800 = 93,75 Klavierstimmer

Also leben in Chicago rund 100 Klavierstimmer (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem)

In dem oben angeführten Beispiel kann man deutlich erkennen, dass es nicht wichtig ist, genaue Ergebnisse zu erhalten sondern grobe Abschätzungen zu machen. Außerdem muss man sich die nötigen Informationen aus dem Internet oder anderen Datenbanken suchen.

Ziel des Klavierstimmerbeispiels ist es nun, die Anzahl der Klavierstimmer in Chicago durch Schätzungen und Überschlagsrechnungen zu erhalten. Dennoch sind nicht alle Fermi-Aufgaben gleich aufgebaut und streben gleiche Ergebnisse an.

Man unterscheidet zwischen unterschiedlichen Aufgabentypen, die im praktischen Teil näher ausgeführt werden[1].

- Anzahlen und Größen durch Schätzen und Überschlagen erhalten
  z.B.: Wie viele Haare wachsen auf deinem Kopf?

[1] Die Beispiele wurden aus Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010 bzw. Herget, Jahnke, Kroll. *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht*. 2009. entnommen.

- Anzahlen und Größen veranschaulichen
  z.B.: Passen alle ÖsterreicherInnen um den Neusiedlersee? Können alle auf ihm stehen (wenn er zugefroren ist?)

- Kombinieren von Schätzen und Veranschaulichen
  z.B.: Wie hoch wäre ein Turm aus dem Papier, das in deiner Schule jedes Jahr für Kopien verbraucht wird?

- Fehlende Daten aus dem Alltag entnehmen
  z.B.: Wie viel wiegen alle Schülerinnen und Schüler deiner Schule zusammen?

- Fehlende Daten mittels Abbildungen und Bildern ermitteln
  z.B.: Wie viel Wasser könnte der junge Mann mit seinem Fahrrad transportieren?

Abbildung 1

- Fehlende Informationen durch Messungen und Experimente einholen
  z.B.: Wie oft schlägt dein Herz in einem Jahr?

- Daten aus vorhandenen Quellen ermitteln
  z.B.: Wie viele Tennisbälle haben Serena Williams oder Roger Federer wohl in ihrem Sportlerleben schon aufgehoben?

- Ergebnisse durch Experimente erhalten
  z.B.: Wie lang ist der Faden, aus dem ein Pullover besteht?

(vgl. Greefrath 2010: 81)

2.3. Allgemeine Anwendung von Fermi-Aufgaben

- **...um Berechnungen zu ersetzen**

Nicht immer ist man an genauen Lösungen interessiert beziehungsweise hat man nicht immer die nötigen Informationen zur Verfügung, um eine exakte Berechnung vorzunehmen. In diesem Fall hilft das Prinzip der Fermi-Aufgaben, um einem genauen Ergebnis möglichst nahe zu kommen. Z.B.: *Stell dir vor, du willst dein Zimmer neu streichen. In welcher Farbe würdest du es streichen? Wie viel Farbe brauchst du, wenn 1 Liter Farbe für 6 – 8 m² reicht* (Maaß 2007: 61)? Es ist nicht nötig, die genaue Quadratmeterzahl zu berechnen, wenn man ein Zimmer streichen will.

- **…um Berechnungen vorzubereiten**

Bevor man versucht, komplizierte Rechnungen zu lösen, kann man abschätzen, ob der gewählte Rechenweg überhaupt zu einem brauchbaren Ergebnis führt. Außerdem kann man die Größenordnung und den damit verbundenen Aufwand einer Berechnung im Voraus erkennen und berücksichtigen. Z.B.: *Wie viele Briefe trägt ein Briefträger im Jahr aus* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte F3)? Man kann das Ergebnis zuerst im Groben berechnen, bevor man Detail mit einbezieht.

- **…um Berechnungen zu überprüfen**

Arbeitet man mit komplizierten Sachverhalten und langwierigen Rechenvorgängen, können mögliche Fehler oft unerkannt bleiben. Hat man vorher eine Abschätzung gemacht, also ein ungefähres Ergebnis erhalten, kann man grobe Abweichungen feststellen und beheben. Erfolgt dies bereits mitten in einer Rechnung, erspart man sich weitere fehlerhafte Schritte und somit auch Zeit und Arbeit. Z.B.: *Passen alle ÖsterreicherInnen um den Neusiedlersee? Können alle auf ihm stehen (wenn er zugefroren ist)? Würden alle in ihn hineinpassen (wenn man das Wasser herausließe)* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte D3)? Hier kann man eine beispielsweise eine mittlere Tiefe, Länge und Breite annehmen und somit die genauere Bearbeitung mit den verschiedenen Dimensionen des Sees überprüfen.

- **… um die Lösung komplexer Probleme zu erleichtern**

In vielen Fällen ist es sinnvoll, komplizierte Probleme in mehrere Teilprobleme zu zerlegen. Durch mehrere kleinere Abschätzungen ist es möglich, der exakten Lösung des Gesamtproblems verblüffend nahe zu kommen. Dies erfolgt unter anderem dadurch, dass man den Zahlenbereich, in dem sich das endgültige Ergebnis befindet, nach oben und unten hin eingrenzt und somit wieder präzisieren kann. Durch die Unterteilung in Teilabschätzungen fällt es in vielen Fällen leichter, die zugrundeliegenden Ausgangspunkte, Annahmen, aber auch Theorien zu erkennen und sie in den endgültigen Arbeitsvorgang einzubauen, was die Lösung wiederum beschleunigen kann (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem). Z.B.: *Auf eine DVD mit 4,7 GB Kapazität passen etwa 120 Minuten Video. 1 Minute Audio (mp3) belegen ca. 1 MB. Wann etwa werden die Festplatten so groß sein, dass wir unser ganzes Leben per Audio aufnehmen können? Wann reicht es für einen kompletten Videomitschnitt unseres Lebens* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte C16)? Um diese Aufgabe zu lösen, muss man schrittweise vorgehen, um an das endgültige Ergebnis zu kommen.

2.4. Gründe für die Anwendung von Fermi-Aufgaben in der Schule

Betrachtet man den Inhalt diverser aktueller Schulbücher für das Unterrichtsfach Mathematik, so kann man feststellen, dass Fermi-Aufgaben noch nicht stark verbreitet sind. Dennoch sollte man aus folgenden allgemeinen Gründen in Erwägung ziehen, Fermi-Aufgaben in den Unterricht einzubauen. (In späteren Kapiteln wird Bezug speziell auf Lehrplan und Bildungsstandards genommen.)

- **Fermi-Aufgaben fördern selbstständiges Arbeiten**

In vielen Schulen ist es noch üblich, Mathematik ausschließlich frontal zu unterrichten. Das bedeutet, dass der Lehrer bzw. die Lehrerin vorzeigt, wie man bestimmte Rechnungen und Probleme löst. Anschließend versuchen die Schüler und Schülerinnen, sich diese Rechenschritte anzueignen und selbst anzuwenden. Diese Art von Unterricht darf nicht generell als negativ bewertet werden, da viele Lernende davon profitieren. Dennoch nimmt sie den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit selbstständig zu arbeiten und zu lernen Probleme eigenständig zu lösen. Aus diesem Grund ist es hilfreich, Freiarbeitsphasen, bei denen die Lernenden eigenständig arbeiten müssen, einzubauen. Entschließt sich ein Lehrer oder eine Lehrerin nun, seinen bzw. ihren Unterricht zu öffnen, so bieten Fermi-Aufgaben eine Möglichkeit, dies zu tun. Durch die typische Offenheit der Fragen müssen die Schüler herausfinden, wie sie an Materialien und Informationen kommen und mit den gefundenen Daten schließlich einen Lösungsweg für das ihnen gestellte Problem finden. Außerdem kann es durchaus vorkommen, dass die Lösung einer solchen Aufgabe mehr als eine Stunde beanspruchen kann, wodurch die Schüler und Schülerinnen lernen müssen, ihre Zeit entsprechend einzuteilen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010*:* 5). Z.B.: *Wie viele Brötchen (belegt mit Wurst oder Käse) müsste ein Bäcker in der Pause an deiner Schule bereithalten* (vgl. Maaß 2007: 56)? Die Schüler können die nötigen Daten erfragen oder abschätzen.

- **Förderung der Auseinandersetzung mit mathematischen und sozialen Problemen**

Obwohl Fermi-Aufgaben oft nur aus einem Satz bestehen, wie zum Beispiel die bereits angeführte Frage: „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“, ist ihre Lösung nicht immer mit einem Schritt getan. Oftmals ist es erforderlich, dass die Schüler und Schülerinnen das Problem in kleinere Teile zerlegen, diese dann lösen und durch Zusammensetzen der einzelnen Teillösungen zu einer Gesamtlösung finden. Hierbei kann es auch vorkommen, dass verschiedene Schülerinnen und Schüler zu unterschiedlichen Lösungswegen und Ergebnissen kommen. Aus diesem Grund ist es auch wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen lernen, ihre Handlungsweisen und Rechenschritte zu begründen und verteidigen. Man kann behaupten, dass durch Fermi-Aufgaben nicht nur die rechnerischen, sondern auch die sozialen Kompetenzen der Kinder gefördert werden. Keine Schülerin bzw. kein Schüler wird es leichtfertig hinnehmen, wenn ein anderer oder eine andere seine bzw. ihre Lösung als die einzig wahre präsentiert. Es ist wichtig aufzuzeigen, dass mehrere Lösungen richtig sein können, sofern der Rechenvorgang und die verwendeten Daten ausreichend und nachvollziehbar argumentiert wurden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 5). Wenn die Schülerinnen und Schüler diese Erkenntnis erlangt haben, kann man ihnen auch durchaus nahelegen, dass auch alltägliche Probleme durch miteinander Kommunizieren gelöst werden können. Z.B.: *Wie viele Tennisbälle haben Serena Williams oder Roger Federer wohl in ihrem Sportlerleben schon aufgehoben* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte G5)? Hierbei können verschiedene Theorien bezüglich des Aufhebens der Bälle entstehen. Man kann verschiedene Trainings- und Matchsituationen annehmen, was verschiedene Lösungen zulässt, solange die Auswahl begründet ist.

- **Wechselspiel zwischen Realität und Mathematik schaffen**

Mathematik ist oftmals komplex und für Kinder teilweise zusammenhangslos. Deshalb stellen Schüler und Schülerinnen oft die Frage, warum man Mathematik eigentlich brauche. Gelingt es dem Lehrer bzw. der Lehrerin dieses Wechselspiel verständlich zu erklären, kann das Interesse der Schülerinnen und Schüler wiedererweckt werden.

Zunächst kann man Fermi-Aufgaben als Unterart von Sachaufgaben oder Sachrechnungen sehen. Bei diesen Aufgaben soll, wie die gesonderte Namensgebung bereits andeutet, ein expliziter Sachverhalt mit der Mathematik verbunden werden. Greefrath greift Spiegels Definition von Sachrechnung auf, die besagt, dass Sachrechnen der *„Oberbegriff für die Auseinandersetzung mit Aufgaben, die einen Bezug zur Wirklichkeit aufweisen“* ist (Greefrath 2010: 10). Sowohl Sachaufgaben im Allgemeinen als auch Fermi-Aufgaben im Speziellen sollen den Schülern und Schülerinnen zeigen, dass Mathematik nicht, wie oftmals von ihnen behauptet, unnötig ist, sondern in der realen Welt anwendbar und brauchbar ist. Schafft man nun diesen Zusammenhang zwischen der oftmals eher theoretischen Anwendung im Unterricht und der Praxis, kann dies den Schülern und Schülerinnen unter Umständen den Umgang mit Mathematik erleichtern, da sie einen Sinn hinter den verschiedenen Berechnungen sehen. So ist es auch möglich, den Schülern einen mathematischen Input zu geben, der im Anschluss durch Fermi-Aufgaben veranschaulicht und vertieft wird. (vgl. Greefrath 2010: 13 ff). Z.B.: *Wie oft schlägt dein Herz in einem Jahr? Wie oft blinzelst du im Jahr? Wie oft schluckst du in einem Jahr? Etc* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte B8). Die Schülerinnen und Schüler können hier einen Bezug zur Realität erkennen, da sie möglicherweise ihren Puls bereits im Sportunterricht gemessen haben.

2.5. Wann und wie setzt man Fermi-Aufgaben richtig ein?

Grundsätzlich gibt es keine Begrenzungen oder Richtlinien, wann Fermi-Aufgaben in den Unterricht eingebaut werden sollen. Da sie sich meistens mit dem Umgang mit Zahlen und dem Abschätzen und Berechnen von Größen beschäftigen, was hauptsächlich in der Unterstufe behandelt wird, werden Fermi-Aufgaben in diesen Schulstufen am häufigsten eingesetzt. Dennoch wurden bereits Aufgabenstellungen für die ersten Jahre der Oberstufe veröffentlicht. Man begründet die Anwendung in höheren Klassen dadurch, dass man die Fähigkeit des Problemlösens, den Umgang mit Daten, aber auch das Finden von Zusammenhängen zwischen Mathematik und Realität weiterhin fördern muss. Die Schüler können ihre Kompetenzen dadurch verbessern bzw. Gelerntes wieder auffrischen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 3).

Werden Fermi-Aufgaben im Unterricht verwendet, so können sie folgende Funktionen erfüllen:

- **Möglichkeit zum Einstieg in ein neues Thema**

Wie bereits in vorhergehenden Abschnitten erwähnt, wird immer häufiger gefordert, den Unterricht so zu gestalten, dass die Schüler und Schülerinnen Themen und Kompetenzen selbstständig erarbeiten (vgl. Lehrplan AHS - Allgemein). Setzt man Fermi-Aufgaben gezielt bei bestimmten Themen, z.B.:

Flächenberechnungen, ein, so dienen sie als „ausgezeichnete Beispiele für problemorientierte Einstiege, die sich noch dazu aus anschaulichen Kontexten heraus entwickeln“ (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 9). Durch ihre meist einfache Fragestellung und ihren Realitätsbezug lassen sie sich oftmals durch Alltagswissen bzw. den sogenannten gesunden Menschenverstand lösen (vgl. www.rechenbaer.de). Sind die Lernenden nun in der Lage, solche realitätsnahen Aufgaben ohne großen Aufwand zu lösen, fällt es ihnen unter Umständen auch leichter, komplexere und praxisfernere Beispiele, wie sie oftmals in Schulbüchern zu finden sind, zu bearbeiten bzw. Lösungsschemata zu erkennen. Z.B.: Beispiel 4 in Kapitel 4.1., wo die Schülerinnen und Schüler die Formel für den Mantel einer Pyramide selbst herleiten können. Anschließend können sie diese Formel auch für praxisferne Aufgaben anwenden.

- **Möglichkeit zum Üben und zur Wiederholung**

Ist man am Ende eines Themas angelangt bzw. ist es schon längere Zeit her, dass ein Thema behandelt wurde, so kann man Fermi-Aufgaben dafür nützen, dass die Schülerinnen und Schüler das Gelernte festigen bzw. wieder aufrufen. Dadurch, dass diese Art von mathematischen Beispielen niemals aus der Luft gegriffen ist, sondern immer einen nachvollziehbaren Kontext besitzt, fällt es den Lernenden relativ leicht die Fragen zu bearbeiten – sogar, wenn die Thematik und die benötigten mathematischen Tätigkeiten bereits vor längerer Zeit im Unterricht gelehrt wurden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010:10).

- **Möglichkeit zur Differenzierung**

Es ist bekannt, dass Fermi-Aufgaben nicht nur auf einem Weg gelöst werden können. Deshalb wird in der *Fermibox 5. – 7.Klasse* folgendes festgehalten:

> *Jeder Schüler, jede Schülerin kann, ausgehend von eigenem Kenntnisstand, zu einem Ergebnis kommen. Durch die vielen möglichen Bearbeitungswege kommen unterschiedliche Herangehensweisen, aber auch unterschiedliche Anspruchsniveaus zum Zuge. So wird der Mathematikunterricht auf natürliche Weise binnendifferenzierend* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 10).

Sollten die schwächeren Schüler und Schülerinnen mit Fermi-Aufgaben überfordert sein bzw. sind die mathematisch begabteren Schüler und Schülerinnen immer schneller mit den ihnen gestellten Aufgaben fertig, so kann man Fermi-Fragen auch ausschließlich als Bonusmaterial für diejenigen, die diese Herausforderung suchen, zur Verfügung stellen.

- **Möglichkeit, Kompetenzen zu diagnostizieren**

Da durch den Einsatz von Fermi-Aufgaben verlangt wird, mathematische Kompetenzen situationsgerecht abzurufen, eignen sie sich als Hilfsmittel zur Erkennung und Förderung dieser Fähigkeiten (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 10). Je nachdem wie die Lernenden die Aufgabe bewältigen, kann man einschätzen, wie gut sie ihr Wissen, das bereits vor längerer Zeit gelernt wurde, abrufen können und wo angesetzt werden muss, um dieses zu verbessern.

Um dieses Kapitel kurz zusammenzufassen, kann man sagen, dass Fermi-Aufgaben den Mathematikunterricht auffrischen und erleichtern können. Sie bilden nicht nur eine gute Verbindung zwischen Realität und Wissenschaft, sondern können den Schülerinnen und Schülern auch Freude am Rechnen bereiten. Des Weiteren sind sie relativ leicht in den Unterricht einzugliedern, da sie in Kombination mit verschiedenen Sozialformen eingesetzt werden können. Zu guter Letzt helfen sie dem Lehrenden, die Schülerinnen und Schüler innerhalb der Klasse einzustufen und ihrem Niveau entsprechend zu fördern.

3. Einsatz von Fermi-Aufgaben in Bezug auf Lehrplan und Bildungsstandards

3.1. Fermi- Aufgaben und der Lehrplan

Die aktuelle Version des Lehrplans für allgemeinbildende höhere Schulen wurde am 11.Mai 2000 für die Unterstufe und am 8. Juli 2004 für die Oberstufe kundgemacht (vgl. http://www.bmukk.gv.at). Sie besteht aus einem allgemeinen Teil, der Punkte, wie das allgemeine Bildungsziel oder die fünf

Bildungsbereiche beinhaltet. Außerdem gibt es für jedes Unterrichtsfach einen spezifischen Teil, der vorschreibt, welche Themen in welcher Schulstufe unterrichtet werden sollen. Der Lehrplan muss nicht eins zu eins befolgt werden, jedoch gilt er als Richtlinie für die Jahresplanung des entsprechenden Unterrichtsfaches.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt gibt es keinen speziellen Abschnitt bzw. Absatz im österreichischen Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen für Ober- und Unterstufe, die explizit besagt, dass Fermi-Aufgaben in den Unterricht eingebaut werden sollen. Dennoch findet man diverse Anforderungen und Ziele, durch die man deren Anwendung rechtfertigen kann.

3.1.1. Allgemeines Bildungsziel

Bereits der erste Teil des Lehrplans, der auch den gesetzlichen Auftrag der AHS beinhaltet, besagt:

> *Die allgemeinbildende höhere Schule hat […] an der Heranbildung der jungen Menschen mitzuwirken, nämlich beim Erwerb von Wissen, bei der Entwicklung von Kompetenzen und bei der Vermittlung von Werten. Dabei ist die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern* (Lehrplan AHS – Allgemein).

Der oben zitierte Absatz besagt nun, dass allgemeinbildende höhere Schulen dazu verpflichtet sind, Lernende sowohl fachlich als auch in sozialen Kompetenzen auszubilden. Mit der Anwendung von Fermi-Aufgaben können beide ausreichend abgedeckt werden. Dass mathematische Aufgaben im Allgemeinen das Fachwissen der Schülerinnen und Schüler fördern, kann durchaus als selbstverständlich angesehen werden. Durch die offene Fragestellung dieser speziellen Gruppe von Rechenaufgaben werden die Lernenden nicht nur angeregt, Mathematik zu praktizieren, sondern auch, die Wahl ihrer Daten und Lösungswege zu argumentieren und die Ergebnisse zu interpretieren und zu begründen. Diese oftmals kurzen aber dennoch sinnvollen Erläuterungen können den Lernenden den Umgang in der Gesellschaft erleichtern. So kann die Lehrperson den Kindern nahebringen, wie wichtig es ist, gewisse Situationen und Gegebenheiten im realen Leben zu hinterfragen und kritisch zu betrachten.

Durch die regelmäßige Anwendung von Fermi-Aufgaben kann dieser Bezug zur Realität langsam und schrittweise hergestellt werden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse:* 5). In diesem Zusammenhang kann auch auf die Forderung des Lehrplans für AHS, dass sogenannte dynamische Fähigkeiten, die die „Gestaltung des sozialen Lebens innerhalb und außerhalb der Schule“ Lehrplan AHS – Allgemein) beinhalten, gefördert werden, eingegangen werden. Es wird verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es im realen Leben oftmals nicht ausreicht, Erlerntes abzurufen und anzuwenden, sondern auch neue und vor allem eigene Lösungswege zu finden, was eines der Hauptziele von Fermi-Aufgaben ist (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein).

3.1.2. Die fünf Bildungsbereiche

Ein weiterer Aspekt für die Eingliederung von Fermi-Aufgaben in den Unterricht ist die Tatsache, dass sie einige Aspekte aus den insgesamt fünf Bildungsbereichen, die sowohl im allgemeinen als auch im fachspezifischen Teil des Lehrplans für allgemeinbildende höhere Schulen angeführt sind, erfüllen.

Der Bereich *Natur und Technik* favorisiert den Einsatz von technischen Hilfsmitteln und Medien (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein). Wie schon häufig in dieser Arbeit diskutiert, sind Fermi-Aufgaben so aufgebaut, dass sich die Lernenden ihre Informationen und Daten zu einem großen Teil selbst beschaffen müssen. Hierfür bietet sich die Benutzung von Computern und somit auch des Internets an. Außerdem könnte man, sofern die technische Ausrüstung der jeweiligen Schule dies zulässt, veranlassen, dass die Schüler ihre Lösungswege und Ergebnisse mittels Präsentation erklären bzw. Online-Plattformen einrichten, wo sie ihre Beispiele mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern teilen können.

Der Bereich *Mensch und Gesellschaft* enthält das *„Untersuchen von Situationen und Problemen mit Hilfe rationalen Denkens; […]; kritischer Umgang mit empirischen Datenmaterial; planmäßiges, sorgfältiges und konzentriertes Arbeiten“* (Lehrplan AHS – Mathematik UST). Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, die Richtigkeit und Nützlichkeit der gefundenen Daten zu überprüfen, bevor sie zum Einsatz kommen. Außerdem sollen sie rational und logisch denken. Fermi-Fragen sind häufig so aufgebaut, dass sie den Einsatz des „gesunden Menschenverstandes“ erfordern, der zum Überprüfen der oben genannten Informationen oftmals ausreichend ist (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem).

Im Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen ist nicht nur Logik sondern auch Kreativität gefragt. In dem Bereich *Kreativität und Gestaltung* sollen die Schülerinnen und Schüler Lösungswege entwickeln und in der Oberstufe darüber hinaus noch viel mehr an Aufgabenstellungen experimentieren und somit mehr Kreativität und Einfallsreichtum an den Tag bringen (vgl. Lehrplan AHS – Mathematik UST und OST).

3.1.3. Didaktische Grundsätze

Der allgemeine und der fachspezifische Teil des österreichischen Lehrplans für allgemeinbildende höhere Schulen für Unter- und Oberstufe enthalten eine Auflistung didaktischer Grundsätze, die ein Lehrer in seinen Unterricht einbeziehen sollte.

- **Förderung durch Differenzierung und Individualisierung**

Da nicht jede/r SchülerIn auf dem gleichen Entwicklungsstand wie ihre/seine Mitschülerinnen und Mitschüler ist, ist es wichtig auf die jeweiligen Bedürfnisse einzugehen. Der Lehrplan fordert deshalb für den Unterricht:

> *Die methodisch-didaktische Gestaltung soll Berücksichtigung der jeweils aktuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler gestatten. Unterrichtsformen, durch die sich die Differenzierung und Individualisierung verwirklichen lassen, reichen von Einzelarbeit über*

> *Partnerarbeit bis zu den zahlreichen Möglichkeiten der Gruppenarbeit. Dazu gehören auch Phasen des offenen Lernens und Wahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler* (Lehrplan AHS – Allgemein)

Da das Lösen von Fermi-Problemen für Schüler neue Herausforderungen, nämlich eigenständiges Recherchieren etc., birgt, ist es einerseits sinnvoll, sie mathematisch begabten Kindern als Ergänzung bzw. anstelle des regulären Unterrichtsmaterial zur Verfügung zu stellen, sofern sie mit den Aufgaben, die der restlichen Klasse gestellt werden, unterfordert sind. Andererseits meint Guido Beerli in seinem Artikel *mathbu.ch: Realitätsbezug im Unterricht*, dass Fermi-Aufgaben durchaus auch von schwächeren Schülern bearbeitet werden können, da sie der *„Natürlichen Differenzierung*“ dienen (Henn 2003: 90). Da die Herangehensweise, wie ein Beispiel gelöst wird, von SchülerIn zu SchülerIn verschieden sein kann, ist es möglich, entsprechende Anforderungen an die Lernenden zu stellen. So kann man von Kindern, die mathematisch begabter sind, verlangen, dass sie ein höheres Lösungsniveau anstreben. Das heißt, sie sollen nicht den einfachsten Weg nehmen, sondern komplexere Strategien entwickeln. Außerdem kann man sie auffordern, detailliertere Begründungen abzugeben. Den schwächeren Schülerinnen und Schülern kann man hingegen Hinweise bzw. Richtlinien zur Informationsbeschaffung anbieten und ihnen somit die Arbeit erleichtern. Auf diese Weise, kann man eine einzige Fermi-Aufgabe für mehrere Lerngruppen zugänglich machen.

- **Unterrichtsformen und soziales Umfeld**

Differenzieren und Individualisieren mittels Fermi-Aufgaben kann außerdem von Vorteil sein, da sie verschiedene soziale Formen zulassen. Sie können einzeln, als Partnerarbeit, in Kleingruppen oder aber auch im Klassenverband gelöst und diskutiert werden. Anfangs kann man gemeinsam an ein Problem herangehen und die Schülerinnen und Schüler schrittweise selbstständig arbeiten lassen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse: 10).* Diejenigen, die mit der Aufgabenstellung alleine nicht zurechtkommen, können dann in Kleingruppen weiterarbeiten bzw. diejenigen, die sich der Herausforderung gewachsen fühlen, können alleine versuchen, das Problem zu behandeln. Ein *„situationsbezogener Wechsel der Sozialformen“* ist erforderlich, welcher die Erlernung *„elementarer Techniken und Regeln für gute*

Team- und Projektarbeit" auch für andere Fächer als Effekt haben kann (Lehrplan AHS – Mathematik OST).

- **Stärken von Selbstständigkeit und Eigenverantwortung**

Der österreichische Lehrplan für AHS gibt vor, dass die Schülerinnen und Schüler zu Selbstständigkeit erzogen werden sollen. Aus diesem Grund ist es erforderlich, dass die Lehrperson Impulse setzt, die es dem Lernenden ermöglichen, diesen Status zu erreichen. Des Weiteren wird von dem Lehrer oder der Lehrerin erwartet, *„Schüler und Schülerinnen in zunehmenden Ausmaß zu befähigen, adäquate Recherchestrategien anzuwenden und […] Informationssysteme real und virtuell zur selbstständigen Erarbeitung von Themen in allen Gegenständen zu nutzen"* (Lehrplan AHS – Allgemein). Außerdem fördern *„selbstständiges Entdecken"* und *„Erfolgserlebnisse"* die Motivation weiterzurechnen und zu lernen, wenn man eine Aufgabe ohne Hilfe lösen kann, (vgl. Lehrplan AHS – Mathematik UST). Betrachtet man diese Forderung hinsichtlich Fermi-Aufgaben, wird deutlich, dass diese Art von Aufgabenstellung zur Erreichung dieser Ziele, nämlich eigenständig zu arbeiten und zu motivieren, beiträgt.

- **Herstellen von Bezügen zur Lebenswelt**

> *Im Sinne des exemplarischen Lernens sind möglichst zeit- und lebensnahe Themen zu wählen, durch deren Bearbeitung Einsichten, Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden gewonnen werden. Die Materialien und Medien, die im Unterricht eingesetzt werden, haben möglichst aktuell und anschaulich zu sein, um die Schülerinnen und Schüler zu aktiver Mitarbeit anzuregen* (Lehrplan AHS - Allgemein).

Guido Beerli schreibt, dass *„Fermifragen ein effizientes Mittel sind, um realitätsbezogenen Mathematikunterricht zu realisieren"* (Henn 2003: 90). Außerdem meint er, dass Fermi-Aufgaben so konzipiert sind, dass Jugendliche dadurch lernen,

- *dass auf den ersten Blick Undifferenzierbares sich mit einigen wenigen Überlegungen wenigstens von der Größenordnung her „in den Griff bekommen" lässt,*

- *dass Zahlen und Modelle vieles einsehbar machen, zu dem man vorher absolut keinen Zugang hatte, mithin „Rechnen" einen durchaus praktischen Wert hat.*
- *dass quantitative Angaben aus den Medien oft einfach durch die Jugendlichen selbst auf ihre Glaubwürdigkeit geprüft werden können, was sich fraglos positiv auf das Selbstvertrauen auswirkt* (Henn 2003: 90).

Können die Schülerinnen und Schüler einen Sinn hinter den zu bearbeitenden Aufgaben finden, kann dies wiederum bewirken, dass sie ihr mathematisches Wissen weiter ausbauen wollen (vgl. Lehrplan AHS – Mathematik OST). Als Lehrperson sollte man also dafür sorgen, dass ein reiches Angebot an anwendungsorientierten und realitätsbezogenen Aufgaben vorhanden ist.

3.1.4. In welchen Schulstufen soll man Fermi-Aufgaben anwenden?

Wie schon in den vorhergehenden Kapiteln erwähnt, sind Fermi-Aufgaben aufgrund ihrer Fragestellungen und damit verbundenen Rechenoperationen meist so ausgelegt, dass sie für den Einsatz in der Unterstufe besser geeignet sind als für die Oberstufe. Fermi-Aufgaben setzen sich zu einem großen Teil mit Zahlen und Größen auseinander, welche hauptsächlich in den fünften bis achten Schulstufen durchgenommen werden. Dennoch wurde in den letzen Jahren daran gearbeitet, Aufgaben für die höheren Schulstufen zu erstellen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 3). Somit wurde gewährleistet, dass Fermi-Aufgaben in so gut wie jedem Bereich des Mathematikunterrichts eingesetzt werden können.

Wie man unschwer erkennen kann, kann durch den Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen die Anwendung von Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht gerechtfertigt werden. Der Lehrplan ist sehr inputorientiert, was bedeutet, dass Wert darauf gelegt wird, dass möglichst viel Inhalt vermittelt wird. Da Fermi-Probleme sehr vielseitig sind, können diese Inhalte damit gelehrt bzw. gefestigt werden (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 5).

3.2. Fermi-Aufgaben und die Bildungsstandards

3.2.1. Was sind Bildungsstandards und wozu dienen sie?

Aufgrund von schlechten Ergebnissen der österreichischen Schülerinnen und Schüler bei internationalen Schülerleistungsstudien hat man in den letzten Jahren versucht, das österreichische Schulsystem maßgeblich zu verändern und zu reformieren. Man ist zu der Erkenntnis gekommen, dass es den Lernenden an Grundkompetenzen, wie sinnerfassend Texte zu lesen, mangelt und somit einer Förderung im Unterricht bedarf (vgl. Breit, Friedl-Lucyshyn und andere 2010: 4).

Um den Effekt der Veränderungen evaluieren zu können, ist es erforderlich *„Rückmeldungen über die erbrachten Leistungen und den Grad der Erreichung der pädagogischen Ziele“* einzuholen (Breit, Friedl- Lucyshyn und andere 2010: 2).

Aus diesem Grund wurden neben anderen Maßnahmen die sogenannten Bildungsstandards eingeführt. Diese dienen aber nicht nur zur Qualitätssicherung und –überprüfung sondern sollen dazu beitragen, dass sich der Unterricht sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für das Lehrpersonal ändert. Der Unterricht bewegt sich weg vom Erbringen von Leistungen im Sinne von guten Noten durch Überprüfung von momentanem Wissen hin zum Erlangen diverser Grundkompetenzen, die eben durch die Bildungsstandards festgelegt worden sind. Die vorgegebenen Kompetenzen dienen in den Fächern Mathematik, Deutsch und Englisch als Orientierung für Lehrerinnen und Lehrer, da sie definieren, was die Schülerinnen und Schüler zu einem gewissen Zeitpunkt, insbesondere nach einem Lernprozess, beherrschen sollten. Das Lehrpersonal ist dazu verpflichtet, die Unterrichtsgestaltung nach dem Kompetenzmodell zu richten und den Lernfortschritt der Kinder zu beobachten. Am Ende der vierten bzw. achten Schulstufe wird mittels Standardüberprüfung durch Testaufgaben festgestellt, ob diese Ziele auch erreicht worden sind. Die ausgewerteten Ergebnisse geben Aufschluss über die Qualität der Unterrichtsgestaltung und den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Die Stundenplanung kann für die folgenden Schuljahre entsprechend angepasst und verändert werden, zum Beispiel durch individuelle Förderung der Schülerinnen und Schüler (vgl. Benesch-Tschanett, Friedl-Lucyshyn und andere 2009: 2,3).

3.2.2. Die Bildungsstandards für Mathematik und Fermi-Aufgaben

Die Bildungsstandards für Mathematik sind so ausgelegt, dass sie nicht berücksichtigen sollen, was im Unterricht genau gelehrt wird, sondern darauf, was Schülerinnen und Schüler aus dem Unterricht mitnehmen. Es geht mehr darum, Fähigkeiten zu erwerben, als viel Wissen, das unter Umständen bald wieder vergessen ist, zu erlangen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 5).

Wie schon in früheren Abschnitten dieser Arbeit diskutiert, geben Fermi-Aufgaben den Lernenden einen Anreiz zum selbstständigen Denken und geben keinen Weg vor, mit dem Beispiele gelöst werden sollen. Durch das eigenständige Überlegen und Arbeiten nehmen die Schülerinnen und Schüler oft mehr aus dem Unterricht mit ins reale Leben, als nach einer Stunde, bei der Aufgaben wie nach einem Kochrezept gelöst werden. Auch der US-amerikanische Pädagoge John Dewey vertritt die Theorie, dass Lernen auf Erfahrungen aufbaut und dass der Lehrer oder die Lehrerin nicht bevormunden sondern helfen solle. Dewey favorisiert hierzu Projektarbeit als Unterrichtsform, aber wie schon oftmals erwähnt, sind Fermi-Aufgaben so gestellt, dass sie durchaus alleine gelöst werden können und denselben Effekt haben, nämlich *learning-by-doing* (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/John_Dewey).

Sind die Schülerinnen und Schüler nun in der Lage, die ihnen gestellten Aufgaben eigenständig zu lösen, liegt es nahe, dass sie die Fähigkeit auch auf das Leben außerhalb der Schule anwenden können. Wie auch bereits im Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen angeführt, fordern auch die Bildungsstandards, dass der Mathematikunterricht so gestaltet wird, dass die Lernenden das nötige Wissen und Können erwerben, um *„aktive, unbehinderte, reflektierte, kritische, emanzipierte“* Teilnehmer an der heutigen Gesellschaft zu werden (Neureiter, Fürst und andere 2010: 7). Da man den Lebensweg der einzelnen Schülerinnern und Schüler jedoch nicht vorhersagen kann, wird bei den Bildungsstandards versucht, nicht auf spezielle Kompetenzen zu fokussieren, sondern ein breites Spektrum zu repräsentieren. Es werden nicht nur die operativen und konstruktiven Aspekte der Mathematik mit einbezogen, sondern auch die kommunikativen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 8). Bezüglich Fermi-Aufgaben weiß man bereits, dass sie all diese Komponenten abdecken können, da sie die Schüler zum Lösen der Probleme aber auch zum Begründen der beschrittenen Wege anregen. Man kann also durchaus behaupten, dass die Einbindung von Fermi-Fragen in den Unterricht eine potentielle Vorbereitung auf eine bevorstehende Standardüberprüfung darstellen kann.

3.2.3. Das Kompetenzmodell für mathematische Bildungsstandards in Bezug auf Fermi-Aufgaben

Im *Praxishandbuch für Mathematik* werden Kompetenzen als *„längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden, die von den Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 9). In der Mathematik beziehen sie sich nicht nur auf Tätigkeiten sondern auch auf Inhalte und deren beider Vernetzungen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 9).

Um das Kompetenzmodell darzustellen, beschreibt man nun drei verschiedene Dimensionen, die Handlungsdimension, die Inhaltsdimension und die Komplexitätsdimension, welche jeweils unterschiedliche Ausprägungen haben können. Des Weiteren ist es wichtig zu erwähnen, dass verwandte bzw. ähnliche Inhalte, Prozesse und Schwierigkeitsstufen in Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsbereiche eingeteilt werden können. Eine mathematische Kompetenz wird somit aus der Verknüpfung dieser drei Bereiche, einem sogenannten Tripel, dargestellt und festgelegt (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 9). Man kann sich dies folgendermaßen vorstellen:

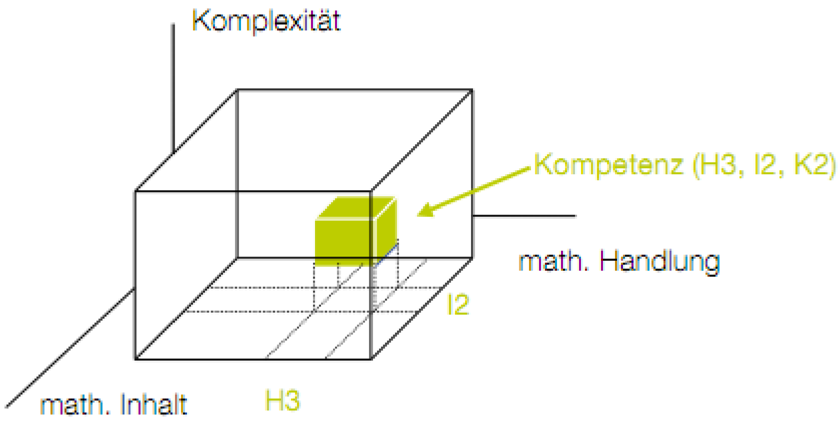

Abbildung 2: Neureiter, Fürst und andere 2010: 9

- **Handlungsbereiche und Fermi-Aufgaben (8.Schulstufe):**

H1 Darstellen und Modellbilden

Unter Darstellen versteht man *„die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Schülerinnen und Schüler lernen bereits in den ersten Klassen der allgemeinbildenden höheren Schulen, wie man Daten und deren Zusammenhänge darstellen kann. In einigen Schulbüchern sind bereits Kapitel über Statistik zu finden. Das heißt, es ist durchaus möglich, dass einige Schülerinnen und Schüler bereits mit dem Umgang mit Diagrammen vertraut sind und diese bei der Lösung von Fermi-Problemen anwenden können, da sie sich oft auch bereits als der eigentliche Lösungsweg eignen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 5).

Der Schritt des Modellierens erfordert nicht nur darstellen, sondern mathematische Beziehungen in Sachverhalten zu erkennen, in dem daraus erstellten Modell zu arbeiten und die Ergebnisse anschließend zu prüfen und zu interpretieren. (Die beiden letzteren Schritte fallen bereits in H2 und H3.) Wie schon häufig in vorangegangenen Kapiteln erwähnt, sind Fermi-Aufgaben Paradebeispiele für den Zusammenhang bzw. die Wechselwirkung von Realität und Mathematik. Die Fragen sind meistens so konzipiert, dass ein Foto oder ein realistisches Problem den nötigen Denkanstoß gibt (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 4).

H2 Rechnen, Operieren

Mit Rechnen meint man *„die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen“* und *„die regelhafte Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Operieren beinhaltet die *„Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- und Konstruktionsabläufen“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Zusammengefasst bedeutet dies, dass die Schülerinnen mit Termen, Gleichungen, Statistiken usw. umgehen müssen. Sie sollen Symbole in natürliche Sprache umwandeln (was sich mit H3 überschneidet) und Hilfsmittel, wie zum Beispiel Taschenrechner oder elektronische Medien, zur Lösung der Probleme einsetzen. Da Fermi-Aufgaben aus kurzen Angaben und gleichzeitig aus wenig Informationen bestehen, ist es oftmals erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler mit Computern arbeiten, um sich die benötigten Daten zu beschaffen und diese anschließend auch zu bearbeiten (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 5).

H3 Interpretieren

Im Praxishandbuch für Mathematik wird Interpretieren folgendermaßen definiert:

> *Interpretieren meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzustellen sowie Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.* (2010: 10).

Durch die offene Fragestellung bieten Fermi-Aufgaben den Lernenden eine Vielfalt von verschiedenen Auffassungen und Interpretationen. Während man versucht, ein Problem zu lösen, können immer neue Fragen aufkommen. Da jeder Mensch anders denkt, kann es dadurch häufig vorkommen, dass die Herangehensweise an die Probleme verschieden ist, was durchaus legitim ist, solange das Ergebnis nachvollziehbar und sinnvoll ist (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 4).

H4 Argumentieren und Begründen

Argumentieren ist die *„Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Außerdem müssen die Lernenden in der Lage sein, ihre Überlegungen adäquat zu verteidigen. Das heißt, sie sollen ihre Ergebnisse und Herangehensweisen mittels einer korrekten mathematischen Fachsprache und diverser Hilfsmittel zur Präsentation darstellen und gleichzeitig überprüfen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 5).

Wie schon im Punkt H3 behandelt, lassen Fermi-Aufgaben den Schülerinnen und Schülern Raum für verschiedene Ansätze (siehe H1) und Lösungswege (siehe H2). Da es bei den Ergebnissen meist kein eindeutig richtiges oder eindeutig falsches Ergebnis gibt, hängt die Beurteilung der Richtigkeit oftmals von der Präsentation und Argumentation der verwendeten Daten, Rechenschritte und Ergebnisse ab (vgl. www.rechenbaer.de). Haben die Lernenden unterschiedliche Auffassungen und Versionen, so kann sich dies positiv auf ihre Kommunikations- und Diskussionsbereitschaft auswirken (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 5).

- **Inhaltsbereiche und Fermi-Aufgaben (8.Schulstufe)**

I1 Zahlen und Maße

Wie der Name dieses Bereichs bereits sagt, beinhaltet er Zahlen situationsangemessen darzustellen, zum Beispiel in Bruch- oder Dezimalschreibweise, Rechengesetze anzuwenden, Ergebnisse gegebenenfalls zu runden, mit Maßeinheiten zu arbeiten, vor allem, sie richtig einzusetzen und umzuwandeln, Flächen und Umfange zu berechnen und selbstständig Messungen vorzunehmen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 6).

Man kann behaupten, dass der Umgang mit Zahlen eine der wichtigsten Eigenschaften von Fermi-Aufgaben ist. Die Rechnungen basieren oft auf geschätzten bzw. gerundeten Zahlen und um sie korrekt zu lösen, müssen, wie in anderen mathematischen Aufgaben, Rechenregeln beachtet werden. Das

Messen von Zahlen dient häufig zur Datenbeschaffung, sofern die Größe, Fläche usw. einer Sache von Relevanz ist. Außerdem müssen die gefundenen Werte anschließend mittels Einsetzen in Formeln verarbeitet werden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 6).

I2 Variable, funktionale Abhängigkeiten

Dieser Bereich inkludiert Variable, Terme und (Un-)Gleichungen und die Darstellung funktionaler Zusammenhange. Dies bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler unter anderem den Umgang mit Variablen und Termen; einfachen Gleichungen und Ungleichungen; linearen Funktionen; verbaler, tabellarischer, grafischer und symbolischer Darstellung funktionaler Zusammenhänge etc. beherrschen sollten (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

Hinsichtlich der Anwendung von Fermi-Aufgaben im Unterricht kann das Verständnis funktionaler Zusammenhänge von Bedeutung sein. Die Erstellung einer Funktion kann den Lernenden unter Umständen dazu verhelfen, Lösungsstrategien zu entwickeln, da sie unter anderem beim Abschätzen von Größen oder Flächen von Nutzen sein kann, bzw. ist eine graphische Darstellung des Problems oftmals bereits eine fertige Lösung (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 7).

I3 Geometrische Figuren und Körper

In diesem Inhaltsbereich wird gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler grundlegende geometrische Grundbegriffe bzw. geometrische Körper und Figuren kennen. Außerdem sollen sie in der Lage sein, die letzteren darzustellen und ihre Eigenschaften beschreiben zu können (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11). Es wird also von den Lernenden erwartet, dass sie am Ende der achten Schulstufe mit geeigneten Hilfsmitteln Vierecke, Pyramiden, Kreise, Geraden etc. skizzieren und beschreiben können.

Fermi-Aufgaben entsprechen insofern diesem Bereich, da geometrische Figuren und Körper als Hilfestellung für die Modellierungen und Annahmen dienen. Wenn nun die Aufgabenstellung verlangt, die Hülle einer Orange zu berechnen, so kann man annehmen, dass diese der Oberfläche einer Kugel entspricht und diese anschließend zeichnen und ausrechnen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 7).

I4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen

In diesem Bereich wird erwartet, dass die Lernenden statistische Daten tabellarisch darstellen, Diagramme erstellen etc. (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

Fermi-Aufgaben passen insofern in diesen Bereich, da die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, die Beispiele durch Erstellen von Diagrammen und lesen von Statistiken zu lösen, sofern die Fragestellung darauf ausgerichtet ist. So kann es vorkommen, dass zusätzlich zu einer Frage eine Tabelle gegeben ist, aus der die Lernenden die relevanten Informationen ablesen sollen.

- **Komplexitätsbereiche und Fermi-Aufgaben**

K1 Einsetzen von Grundkenntnissen und –fertigkeiten

Dieser Bereich beinhaltet die *„Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen, Verfahren und Darstellungen“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 11). Hierbei wird nur erwartet, dass die Lernenden ihr Wissen unmittelbar anwenden können und dass die Komplexität eher gering ist.

Um Fermi-Aufgaben zu lösen, ist es erforderlich zumindest diese mathematischen Grundkenntnisse zu besitzen, ansonsten wäre man nicht in der Lage zumindest Ansätze zur Lösung der Aufgabe zu finden.

K2 Herstellen von Verbindungen

Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler komplexere Sachverhalte und Probleme mathematisch bearbeiten können. Sie sollen mehrere Begriffe, Sätze, Verfahren und Darstellungen miteinander verbinden können (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11)

Im Prinzip ist dies der Grundgedanke von Fermi-Fragen. Sie lassen sich oftmals nicht durch eine simple Rechnung oder Überlegung lösen. Sie fordern den Lernenden auf, sich mit der Sachlage auseinanderzusetzen und das Problem unter Umständen in kleinere Teilprobleme zu zerlegen. Die Verknüpfung der einzelnen Probleme kann dann zu der allgemeinen Lösung führen (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem). Weiters können sich die Schülerinnen und Schüler durch Graphen oder andere Darstellungen Anhaltspunkte für das Weiterrechnen holen. In diesem Fall müssen sie dann graphisches Material mit rechnerischen Fähigkeiten vernetzen.

K3 Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Im Praxishandbuch für Mathematik wird folgendes bezüglich Reflexion geschrieben:

> *Reflektieren meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind. Reflektieren umfasst das Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise […], über Vor- und Nachteile von Darstellungen […] bzw. über mathematische Modelle […] im jeweiligen Kontext sowie das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

Da Fermi-Fragen grundsätzlich sehr offen gestellt sind und oftmals auf verschiedene Arten interpretiert und verarbeitet werden können, kommt es oft zu unterschiedlichen Lösungen (vgl. www.rechenbaer.de). Allein aus diesem Grund ist es von großer Wichtigkeit, nochmals über die Herangehensweisen und deren Begründungen nachzudenken. Anders könnte man nicht herausfinden, ob bei der Lösung der Aufgabe eventuelle Fehler, zum Beispiel durch die Annahme unpassender Voraussetzungen, entstanden sind.

Zusammengefasst kann man behaupten, dass die Anwendung von Fermi-Aufgaben durch so gut wie jeden Bereich der Bildungsstandards gerechtfertigt werden kann. Das Ausmaß, in welchem die einzelnen Bereiche vorhanden sind, ist beispielabhängig und kann manchmal mehr und manchmal weniger sein. Fermi-Aufgaben sind so flexibel in der Bearbeitung, dass sie sowohl einen großen Teil von mathematischen Handlungskompetenzen als auch alle mathematische Inhaltsbereiche abdecken. Die Komplexität ist größtenteils von den Lernenden selbst abhängig, da sie selbst bestimmen, wie genau oder wie umfangreich die Lösung des Beispiels ausfallen soll.

3.3. Fermi-Aufgaben in Bereichen außerhalb des Unterrichts

Fermi-Aufgaben können nicht nur direkt im Unterricht eingesetzt werden, sondern auch in anderen schulischen bzw. außerschulischen Bereichen.

Zum einen werden Beispiele, die der Fragestellung von Fermi-Aufgaben sehr nahe kommen, für die PISA-Studien eingesetzt. Bei PISA- Mathematik geht es darum, zu messen, welche mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten die Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Schulpflicht erreicht haben, da sie diese für ihr weiteres Leben benötigen. Die Beispiele, die bei PISA getestet werden, gehen von „*mathematischer Grundbildung*" aus, welche folgendermaßen definiert wird:

Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person,

- *die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt,*
- *fundierte mathematische Urteile abzugeben,*
- *und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.* (www.promath.tsn.at)

Die Aufgaben sind daher so aufgebaut, dass sie Kenntnisse bezüglich mathematischer Inhalte voraussetzen. Außerdem brauchen die Schülerinnen und Schüler folgende Kompetenzen, um die Fragestellungen zu bewältigen:

- *die Fähigkeit, mathematisch zu denken,*
- *die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren,*
- *die Fähigkeit zur mathematischen Modellierung,*
- *die Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen,*
- *die Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen,*

- *die Fähigkeit, mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen,*
- *die Fähigkeit zu kommunizieren,*
- *die Fähigkeit, Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen.* (www.promath.tsn.at)

Außerdem wird bei PISA-Aufgaben Wert darauf gelegt, dass die Fragen auch authentisch und nachvollziehbar sind. Aus diesem Grund beziehen sie sich größtenteils auf das persönliche, schulische, berufliche, öffentliche und wissenschaftliche Umfeld der Schülerinnen und Schüler (vgl. www.promath.tsn.at).

Betrachtet man nun die charakteristischen Merkmale von PISA-Aufgaben, so wird man feststellen, dass sie den der Fermi-Aufgaben sehr ähnlich sind. Die Schülerinnen und Schüler müssen Zusammenhänge selbst erkennen und dadurch die Fragen eigenständig bearbeiten und interpretieren.

Wie in früheren Kapiteln bereits häufig erwähnt, sind Fermi-Aufgaben bzw. Beispiele ähnlichen Aufbaus und Ziels auch außerhalb des schulischen Kontexts zu finden. Viele große Unternehmen, wie zum Beispiel McKinsey & Company oder Bain & Company legen Wert darauf, dass ihre Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter mit höchster Qualität und Vielseitigkeit arbeiten. Aus diesem Grund werden die Bewerberinnen und Bewerber Einstiegstests unterzogen, die genau diese Fähigkeiten beurteilen sollen. Diese Tests enthalten in vielen Fällen auch mathematische Fragen, die nach dem Prinzip von Fermi-Aufgaben gelöst werden können. Das heißt, zum Beispiel, dass die Bewerberinnen und Bewerber aus vorgegebenen Tabellen in kürzester Zeit Ergebnisse ablesen müssen bzw. eigene Lösungswege für Probleme bzw. Fälle finden müssen (vgl. www.mckinsey.de).

Im folgenden Beispiel sollen die Bewerberinnen und Bewerber aus einer Tabelle (also aus gegebenen Daten) die Reihenfolge der Regionen in Bezug auf die Wirksamkeit der in dem Fall behandelten Kampagne bestimmen - beginnend mit derjenigen, wo die Kampagne am effektivsten war. Es sind zwar Antwortmöglichkeiten gegeben, dennoch müssen die getesteten Personen aus verschiedenen Informationen, die wichtigste herauszufiltern und zu verwerten.

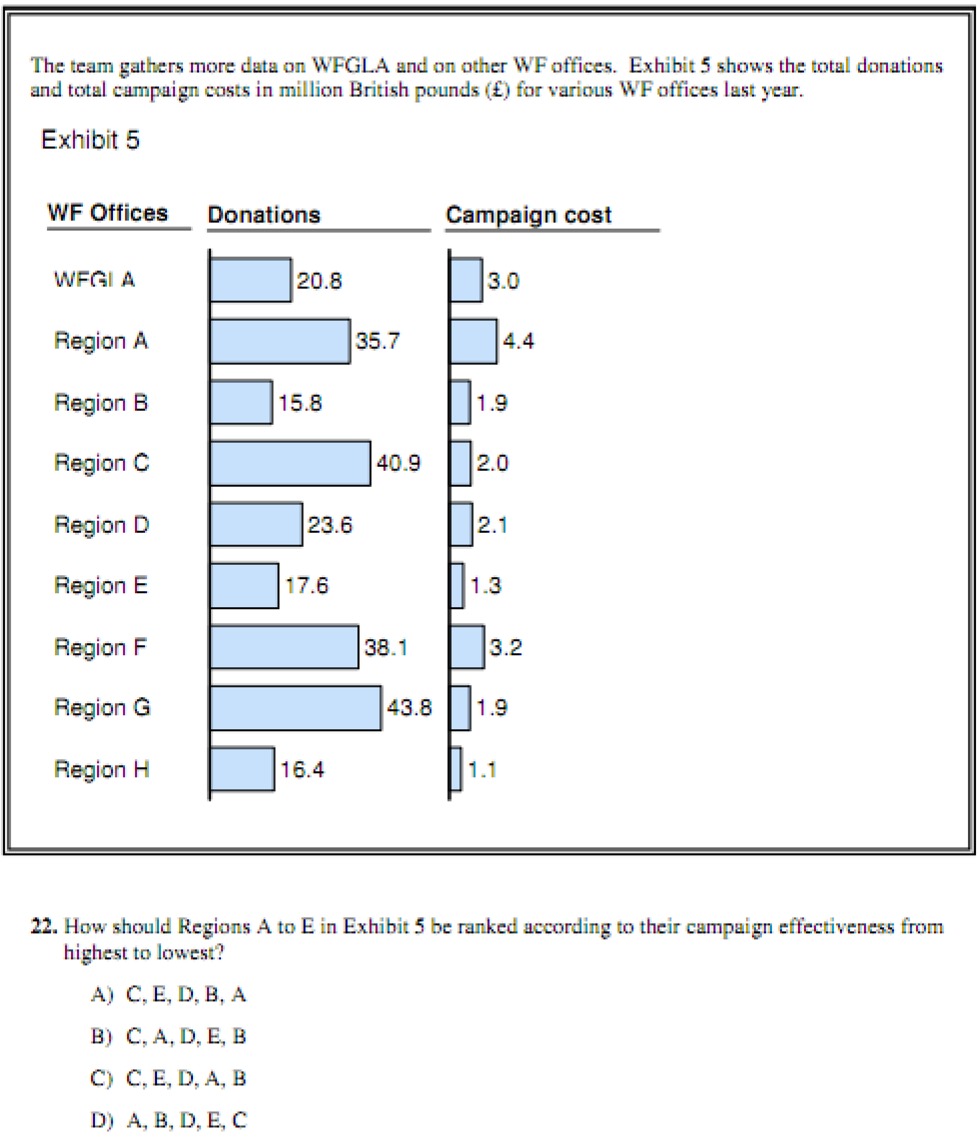
The team gathers more data on WFGLA and on other WF offices. Exhibit 5 shows the total donations and total campaign costs in million British pounds (£) for various WF offices last year.

Exhibit 5

WF Offices	Donations	Campaign cost
WFGLA	20.8	3.0
Region A	35.7	4.4
Region B	15.8	1.9
Region C	40.9	2.0
Region D	23.6	2.1
Region E	17.6	1.3
Region F	38.1	3.2
Region G	43.8	1.9
Region H	16.4	1.1

22. How should Regions A to E in Exhibit 5 be ranked according to their campaign effectiveness from highest to lowest?

A) C, E, D, B, A

B) C, A, D, E, B

C) C, E, D, A, B

D) A, B, D, E, C

Abbildung 3: www.mckinsey.de

4. Aufgabensammlung

Dieses Kapitel enthält ausgewählte Fermi-Aufgaben, gegliedert nach den verschiedenen Arten von Aufgabenstellungen. Die Beispiele aus Punkt 4.1. können als typische Fermi-Aufgaben angesehen werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen anhand eines Referenzwertes andere Werte abschätzen und anschließend das Beispiel lösen. Die anderen Punkte bzw. Aufgaben sind als Vorstufen für Fermi-Aufgaben zu sehen, die eingesetzt werden können, um die Lernenden auf den Umgang mit diesem speziellen Aufgabentyp vorzubereiten.

Zusätzlich zu der Lösung der angeführten Beispiele soll begründet werden, warum sie hinsichtlich des österreichischen Lehrplans für allgemeinbildende höhere Schulen und der Bildungsstandards Mathematik wertvoll für den Einsatz im Unterricht sind, welche Schwierigkeiten bei der Berechnung auftreten können und wie die Aufgaben in den Unterricht eingebunden werden können.

Ist es nicht explizit gekennzeichnet, so wurden die Aufgaben selbstständig bearbeitet.

4.1. Fehlende Daten mittels Abbildungen und Bildern ermitteln

Bei dieser Art von Aufgabe, können die Schülerinnen und Schüler anhand von Bildern Längen, Flächen etc. schätzen und zum Lösen des Problems einsetzen.

Beispiel 1: **Wie viel Wasser könnte der junge Mann mit seinem Fahrrad transportieren?** (Herget, Jahnke, Kroll 2009: 33)

Abbildung 4

Mögliche Lösung: Das Fass ist ca. 1m hoch und hat einen Durchmesser von 50 cm. So ergibt sich für das Volumen eines Fasses:

$$V= r^2 \cdot \pi \cdot h = 0{,}25^2 \cdot \pi \cdot 1 = 0{,}19634 \text{ m}^3$$

Das sind ca. 200 dm³. Da ein Kubikdezimeter einem Liter Wasser entspricht, fassen beide Fässer zusammen ca. 400 Liter Wasser. (vgl. Herget, Jahnke, Kroll 2009: 143)

Einsatz im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler können aus dem Bild die Größe der Fässer entnehmen, indem sie sie mit der Höhe des Fahrrads vergleichen. Dabei können sie auch ihr eigenes als Anhaltspunkt nehmen. Der Durchmesser des Fasses entspricht ungefähr der Breite des Mannes. Anschließend müssen die Lernenden nur mehr in die Formel einsetzen und das Ergebnis berechnen.

Diese Aufgabe beinhaltet das Berechnen des *Volumens eines Zylinders*, was in Österreich lt. Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen bereits in der achten Schulstufe durchgenommen wird (vgl. Herget, Jahnke, Kroll 2009: 143). Sie eignet sich zum Vertiefen und Üben der Volumenberechnung in Textbeispielen und sollte als Differenzierungsaufgabe für diejenigen Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden, die das Einsetzen in die Volumenformel bereits beherrschen. Die leistungsschwächeren Schüler sollten sich darauf konzentrieren, die Formel richtig anwenden zu können und sie auch richtig in den Taschenrechner einzugeben. Sie können die Aufgaben gegebenenfalls zu einem späteren Zeitpunkt bearbeiten.

Um die Frage zu erweitern, könnte man auch noch das *Gewicht* der beiden Fässer berechnen lassen, wobei sie dafür lediglich die Liter in Kilogramm umwandeln müssen (vgl. Herget, Jahnke, Kroll 2009: 143). Im Zuge dessen kann man die Schülerinnen und Schüler auch befragen, ob sie es für möglich halten, dass ein Fahrrad solch ein Gewicht tragen wirklich kann und ob ein einzelner Mensch dieses Gewicht auf diese Weise transportieren kann. Realistisch betrachtet ist dies nämlich nicht möglich. Ein Fahrrad würde im Normalfall zusammenbrechen und die Kräfte des Mannes würden nicht ausreichen. Die Lernenden könnten sich in Folge überlegen, was in den Fässern transportiert werden könnte und abschätzen, wie viel Gewicht man mit einem Fahrrad transportieren kann, ohne es zu beschädigen.

Beispiel 2: **Wie groß wäre ein Mensch, dessen Mund so groß ist wie auf untenstehendem Bild?** (http://www.schule.winterthur.ch)

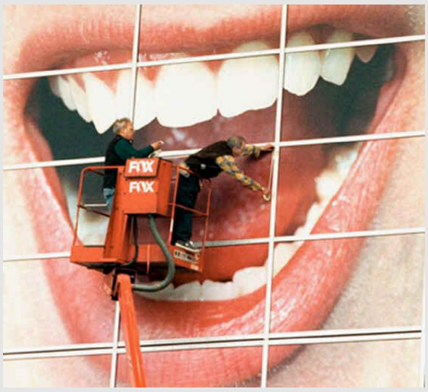

Abbildung 5

Mögliche Lösung: Ein Kästchen dürfte ca. 2 m lang und 1 m hoch sein. Also dürfte der Mund ca. 6 m breit sein. Ein normaler Mund hat eine Breite von 5 cm.

$$600 : 5 = 120$$

Der Plakatmund ist also 120 Mal größer als ein normaler Mund. Ein 170 cm großer Mensch mit einem 5 cm breiten Mund, wäre als Plakat also:

170 · 120 = 20400 cm = 204 m groß.

Einsatz im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler können die Breite des Mundes mit Hilfe der Kästchen und der Größe des Mannes abschätzen. Anschließend können sie die Dimension eines normalen Mundes online oder in Anatomiebüchern recherchieren bzw. den Mund ihrer Mitschüler abmessen. Aus diesem Grund sollte man ihnen gestatten, paarweise zu arbeiten, sofern dies gewünscht wird oder erforderlich ist.

Diese Frage kann nach Abschätzen der gegebenen Dimensionen mittels Schlussrechnung gelöst werden. Das heißt, die Schülerinnen und Schüler sollten ab der fünften Schulstufe fähig sein, sie zu beantworten. Aufgrund ihres noch sehr jungen Alters könnten sie aber mit der Aufgabenstellung selbst, nämlich dem selbstständigen Erarbeiten von Daten, überfordert sein. Aus diesem Grund könnte man das Beispiel entweder als Bonusaufgabe oder als Wiederholung in der nächsthöheren Schulstufe einsetzen. Denn dann sollten sie bereits in der Lage sein, Strategien zum Einholen der Informationen zu entwickeln.

Haben die Schülerinnen und Schüler aber erstmals erkannt, wie das Beispiel zu rechnen ist, also mit Proportionen und Schlussrechnung, sollte es keine weiteren Probleme bei der Lösung des Beispiels geben.

Will man dieses Beispiel noch weiterführen, kann man folgende Fragen ergänzen:

- Wie groß wäre die Hand, der Fuß, etc. der Person?
- Wie lang wären schulterlange Haare?
- Kannst du die Schuhgröße schätzen?

Für die ersten beiden Fragen könnten die Lernenden so verfahren wie bei der Berechnung der Körpergröße. Bei der letzten Frage könnten sie mittels einer Größentabelle, die Schuhgröße und die Länge des Fußes vergleicht, abschätzen. Diese können sie entweder mittel Suchmaschine online suchen oder direkt in einem Schuhgeschäft nachfragen.

<u>Beispiel 3:</u> **Das Flusspferdbaby im Bild wiegt 140 kg und ist 1,20 m lang. Wie schwer ist wohl die Mutter?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte C5)

Abbildung 6

Mögliche Lösung: Das Körpervolumen des Babies beträgt ca.:

$$1{,}20 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}42\ m^3$$

Die Mutter ist ca. 2,5 Mal so lang (und man nimmt an, auch 2,5 Mal so breit und hoch):

$$3 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}75 = 6{,}6\ m^3$$

$$6{,}6 : 0{,}42 = 15{,}6$$

Das heißt, die Mutter ist 16 Mal so schwer wie das Kind, also und hat also folgende Masse:

$$140 \cdot 16 = \underline{\underline{2240\ kg}}$$

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 94)

Einsatz im Unterricht

Dieses Beispiel kann ab der fünften bzw. sechsten Schulstufe eingesetzt werden. Man kann sie zur *Vertiefung von Gewicht und Volumen* verwenden. Beim Letzteren kann es *„Anlass sein, allgemeine Größenverhältnisse ähnlicher Figuren zu untersuchen: Wenn ein Würfel (ein Quader etc.) doppelte Kantenlänge hat, wie wirkt sich dies auf seine Oberfläche und sein Volumen aus?“* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 94).

Man muss sich bewusst sein, dass ein *Hinweis* zur Wahl des geometrischen Körpers, das *Beispiel schon größtenteils löst*. Deshalb sollte man zuerst abwarten, ob die Schülerinnen und Schüler selbst darauf kommen bzw. sie in Paaren oder Gruppen ein Brainstorming machen lassen. Sagt man ihnen nämlich, dass sie das Volumen eines Quaders ausrechnen sollen, brauchen sie nur mehr die Maße einsetzen und sind beinahe fertig (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 94).

Die Schülerinnen und Schüler können als Vorbereitung für diese Aufgabe die *Maße von Tieren recherchieren* und in die nächste Mathematikstunde mitbringen. Dies erleichtert ihnen das Berechnen der Größe des Muttertiers, da sie Richtwerte zur Verfügung haben (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 94). Jedoch muss man bedenken, dass die Schülerinnen und Schüler im Grunde nichts mehr berechnen müssen, wenn sie die Dimension des Muttertiers bereits wissen. Will man, dass sich die Lernenden vorbereiten, sollte man die Größenangaben in der Angabe weglassen und die Größe des Kindes berechnen lassen. So können sie die mitgebrachte Information auch wirklich benutzen.

In der Fermibox wird darauf hingewiesen, dass folgender *Fehler* auftreten kann. Es kann passieren, dass die Schülerinnen und Schüler versuchen, die *Größe einfach abzumessen*. Dies ist aber aufgrund der Perspektive des Fotos nicht möglich, da die Tiere schräg stehen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 94). Dieser Hinweis ist aber im Prinzip irrelevant, da die Maße des Jungtiers als Ausgangspunkt der Schätzung gegeben sind. Die Schülerinnen und Schüler haben somit einen Richtwert und müssen sich keinen eigenständig suchen.

Will man das Beispiel erweitern, so kann man die Schüler die Oberfläche der Haut der beiden Tiere schätzen lassen. In diesem Fall können sie die Körper der Tiere durch verschieden große Quader für Füße, Kopf etc. ersetzen.

Beispiel 4: **Wie viele Dachschindeln braucht man, um das Dach zu decken?** (vgl. http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf)

Abbildung 7

Mögliche Lösung: Angenommen, das Dach ist eine gleichseitige Pyramide mit einer Seitenlänge von 10 m. Außerdem wird angenommen, dass in einer Packung 14 Schindeln für 2 m² sind:

$$h_a = 10^2 - 5^2 = 8,66$$

$$M = 4 \cdot (a \cdot h_a) : 2 = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 10 \cdot 9 = 180 \text{ m}^2$$

Anzahl der Schindeln:

$$14 \cdot 90 = \underline{1260 \text{ Schindeln}}$$

Man braucht also ca. 1300 Schindeln.

Schindeldaten zum Beispiel unter: http://www.icopal.at/upload/icopalat/prospekt%20bitumenschindel%20standard.pdf

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe kann man in der zweiten oder dritten Klasse anwenden (vgl. Lehrplan AHS – Mathematik UST). Es ist nicht unbedingt nötig, dass die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man den Mantel einer Pyramide (3. Klasse) berechnet. Es ist ausreichend, dass sie erkennen, dass sich das Dach aus vier gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt, welche sie schon in der zweiten Klasse bearbeiten können. In der sechsten Schulstufe eignet sich die Aufgabe zum Vertiefen des Flächenbegriffs, in der siebten hingegen kann man es zu Einführung in das Thema Pyramide nehmen. Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre Bearbeitung zunächst wie in der Schulstufe zuvor vornehmen. Anschließend können sie daraus die Formel für den Mantel einer gleichseitigen Pyramide selbstständig erkennen, nämlich 4 Mal die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.

Wird das Beispiel zur Vertiefung angewendet, können die Lernenden alleine arbeiten. Sollten sie aber eigenständig eine Formel herleiten, so ist es hilfreich, wenn die in Paaren arbeiten. Die Schülerinnen und Schüler können sich gegebenenfalls gegenseitig kontrollieren, falls Denkfehler auftreten, was generell häufig passieren kann, wenn sie selbstständig arbeiten.

Man kann oft feststellen, dass Schülerinnen und Schüler bei Flächenberechnungen von Zimmern vergessen, die Fenster und Türen abzuziehen. Aus diesem Grund kann man sie vor der Bearbeitung der Aufgabe fragen, ob sie denken, dass das in diesem Fall wichtig ist und anschließend verlangen, dass sie beide Lösungen, also mit oder ohne Fenster vergleichen. Man wird feststellen, dass es bei dieser Größenordnung kaum einen Unterschied macht, ob man knapp 50 Schindeln mehr oder weniger hat. Ein Überschuss könnte sogar von Vorteil sein, da eine Reserve vorhanden wäre. Aus diesem Grund wurden die Fenster in der obigen Ausarbeitung außer Acht gelassen.

Beispiel 5: **Wie groß ist die Fläche der Antarktis?** (vgl. http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf)

Mögliche Lösung: Angenommen, man berechnet die Fläche mit Hilfe von Quadraten, Rechtecken und Trapezen. Man legt ein großes Quadrat um die Antarktis und subtrahiert oben links ein Trapez, unten links ein Rechteck und rechts, anstelle von 2 Dreiecken, ein Quadrat. Die man links in die Einkerbungen legt.

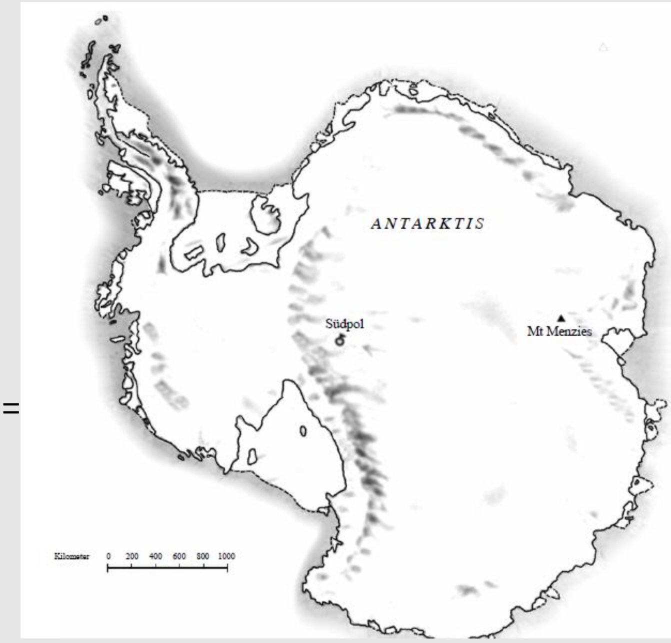

Abbildung 8

1 Einheit = 200 km

$A_{\text{Quadrat}} = 200 \cdot 23 =$

$= 4600^2 = 21160000\ \text{km}^2$

$A_{\text{Trapez}} =$

$= (3 \cdot 200 + 10 \cdot 200) \cdot 200 \cdot 5 : 2 =$

$= 13000000\ \text{km}^2$

$A_{\text{Rechteck}} =$

$(10 \cdot 200) \cdot (3 \cdot 200) =$

$=1200000\ \text{km}^2$

$A_{\text{kl. Quadrat}} = (10 \cdot 200)^2 = 4000000\ \text{km}^2$

$A_{\text{allg.}} = 22000000 – (1300000 + 1200000 + 4000000) = \underline{\underline{15500000\ \text{km}^2}}$

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe könnte theoretisch ab der ersten Klasse eingesetzt werden, da sie sich *auf verschiedene Weisen durch geometrische Figuren beschreiben* lässt. In der ersten Klasse könnte man, sobald Quadrat und Rechteck bzw. Maßstab durchgenommen wurden, die Antarktis mit diesen beiden Figuren beschreiben. Wissen die Schülerinnen und Schüler über die Fläche von Dreieck und Trapez Bescheid, können sie auch diese mit einbeziehen. In der vierten

Klasse bietet sich an, die Form der Antarktis als Kreis zu beschreiben (vgl. http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf).

Das Beispiel ist in den höheren Schulstufen auf jeden Fall alleine zu bewältigen, da die Schülerinnen und Schüler bereits häufiger mit zusammengesetzten Flächen gearbeitet haben sollten. In der ersten oder zweiten Klasse ist es womöglich ratsam, Gruppen oder Paare zu bilden, um die Dimensionen gemeinsam abzuschätzen. In den ersten drei Klassen der Unterstufe kann das Beispiel noch als Bonusaufgabe eingesetzt werden. Ab der vierten sollten aber alle die ausreichenden Kompetenzen, um es zu lösen, entwickelt sein.

Man muss sich bei dieser Aufgabe bewusst sein, dass es bei den verschiedenen Lösungswegen zu Ungenauigkeiten kommen kann. Es ist schwierig, die passende Kombination von geometrischen Figuren zu finden, damit die Landfläche bestmöglich abgedeckt ist. Bei Pisa-Mathematik wird eine Fläche *von 12 Millionen bis 18 Millionen Quadratkilometer als gültig* angesehen. Alle Ergebnisse darüber bzw. darunter gelten als zu ungenau und unrealistisch (vgl. http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf). Die Lernenden können anhand von Lexika oder dem Internet nach der exakten Fläche der Antarktis suchen und letztendlich selbst einschätzen, wie genau sie gearbeitet haben.

Beispiel 6: **Wie sieht der Geschwindigkeitsverlauf bei dieser Achterbahn aus?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte D9)

Abbildung 9

Mögliche Lösung: Es reicht aus, den Graphen der Geschwindigkeits-Weg-Funktion zu skizzieren. Zuerst markiert man, wo der Graph seinen Verlauf ändert, und überlegt sich anschließend, wie sich in den Abschnitten die Geschwindigkeit verhält.

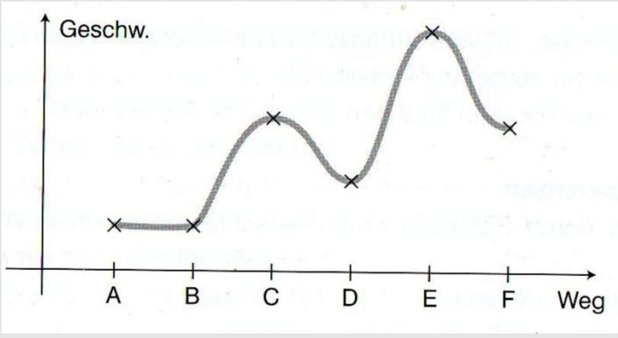

Abbildung 10

(Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 128).

Einsatz im Unterricht

Die Aufgabe kann in der achten bzw. neunten Schulstufe angewendet werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen noch nicht in der Lage sein, die Funktionsabschnitte konkret zu berechnen. Es reicht, wenn sie eine *Skizze des Graphen* anfertigen. Außerdem üben sie damit auch das *Erstellen von Diagrammen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 128).

Will man die Aufgabe als Einführungsbeispiel verwenden, können die Schülerinnen und Schüler in Paaren oder kleinen Gruppen arbeiten. Sie können ihre eigenen Erfahrungen einer Achterbahnfahrt verwenden, um abzuschätzen, ob sich die Geschwindigkeit erhöht bzw. verringert, wenn die Bahn nach unten bzw. oben fährt.

Will man die Aufgabe genauer bearbeiten, so kann man, laut Fermibox, *mittels des Satzes* des *Pythagoras die Streckenverhältnisse* berechnen. Man muss den Verlauf der *Achterbahn in ein Koordinatensystem übertragen* und die einzelnen Abschnitte mittels Pythagoras berechnen und schließlich in ein Geschwindigkeits-Weg- Diagramm übertragen. Um den Bezug zu Fermi-Aufgaben nicht zu verlieren, kann man die Lernenden die *Wurzelzahlen abschätzen* zu lassen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 128). Es stellt sich allerdings die Frage, ob es überhaupt sinnvoll ist, den Graphen genauer zu berechnen. Man könnte bereits beim Skizzieren die unterschiedlichen Weglängen und die dazugehörige

Geschwindigkeitsveränderung berücksichtigen und nicht, wie in der obigen Skizze, die Abschnitte als gleich lang ansehen.

Beispiel 7: **Wie viel Liter Flüssigkeit passen in dieses Fass?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte E10)

Mögliche Lösung: Angenommen, jeder Mann ist ca. 60 cm breit, dann hat das Fass eine Länge von ca. 300 cm. Sein Radius entspricht 2/3 der Größe eines Mannes von 180 cm, also ca. 120 cm. Dann hat das Fass folgendes Volumen:

Abbildung 11

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 120^2 \cdot 3 \cdot 300 = 12960000 \text{ cm}^3 = 12960 \text{ dm}^3 = \underline{\underline{12960 \text{ l}}}$$

In das Fass passen ca. 13000 Liter.

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 148)

Einsatz im Unterricht

Die Aufgabe dient zur Vertiefung des *Volumenbegriffs* und zum Üben der Umwandlungen von *Volumen- und Masseeinheiten* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 148). Abhängig davon, mit welchem geometrischen Körper die Schülerinnen und Schüler das Fass beschreiben, kann sie bereits ab der fünften Schulstufe eingesetzt werden. Es ist naheliegend, das Fass entweder als *Quader oder Zylinder* anzusehen. In den höheren Schulstufen können die Lernenden *beide Varianten berechnen und miteinander vergleichen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 148). Wollen sie feststellen, welche Variante die exaktere Lösung bietet, müssen sie durch Recherche herausfinden, welches Fassungsvermögen solch ein Fass mit ungefähr denselben Maßen wie in der

Rechnung tatsächlich hat. Dies kann sich allerdings als äußerst mühsam und schwierig erweisen. Können sie Lernenden das Fassungsvermögen nicht ausfindig machen, können sie nur den Volumenunterschied herausfinden, aber nicht, ob ihre Annahmen wirklich realistisch bzw. treffend sind.

Die Fragestellung sollte grundsätzlich keine Schwierigkeiten mit sich bringen. Aus diesem Grund kann sie von allen Schülern selbstständig zum Üben der Volumenberechnung bearbeitet werden.

Um die Aufgabe auszubauen, kann man folgende Zusatzfragenstellen:

- *Wie viel Holz wurde für das Fass benötigt?*
- *Wie schwer sind die Metallbänder, die das Fass zusammenhalten=*
- *Wie lange bräuchten die Männer, um es leer zu trinken?* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 148)

Beispiel 8: **Wie viele übliche Kugeln Eis würden in eine solche Riesen-Eistüte passen?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte E12)

Abbildung 12

Mögliche Lösung: Angenommen, die Eistüte

entspricht der Beinlänge der Männer, ca. 110 cm

und hat einen Durchmesser von ca. 50 cm.

Dann hat die Tüte folgendes Volumen:

$$V = (r^2 \cdot \pi \cdot h) : 3 = (25^2 \cdot 3 \cdot 110) : 3 = 68750 \text{ cm}^3$$

Eine Eiskugel hat einen Durchmesser von 5 cm.

$$V = (4 \cdot \pi \cdot r^3) : 3 = (4 \cdot 3 \cdot 2{,}5^3) : 3 = 62{,}5 \text{ cm}^3$$

Daraus folgt:

$$70000 : 70 = \underline{\underline{1000 \text{ Kugeln}}}$$

Es passen mindestens 1000 Kugeln in die Tüte.

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe kann mit der Berechnung des Volumens eines Drehkegels gelöst werden. Das heißt, sie kann ab der achten Schulstufe eingesetzt werden. Außerdem können die Schülerinnen und Schüler das Umwandeln von Volumeneinheiten wiederholen und üben (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 152).

Löst man die Aufgabe wie in der Ausarbeitung, so kann man sie zur Festigung bzw. Überprüfung, ob das Gelernte nach einiger Zeit noch in Erinnerung geblieben ist, einsetzen. In der Fermibox für die achte bis zehnte Klasse wird aber auch ein anderer Lösungsweg beschrieben. Diesen könnte man theoretisch auch vor der Einführung des Themas Kegel anwenden und die Schülerinnen und Schüler, nachdem sie die Berechnung mit Volumenformel gelernt haben, vergleichen lassen. *Es wird angenommen, dass eine normale Eistüte 15 cm groß ist und dass die auf dem Bild zehnmal so groß, breit und tief ist. Das Volumen der großen Tüte wäre also 1000 Mal so groß wie das der kleinen. Passen in eine kleine also 3 Kugeln, dann passen in die große 3000 Kugeln* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 152).

Man sieht nun, dass bei den beiden Berechnungen ein Unterschied von 2000 Kugeln entsteht. Man kann die Lernenden begründen lassen, warum das so ist. Bei der ausgeführten Lösung nimmt man an, dass die Tüte nur bis an den Rand gefüllt wird. Bei der zweiten Ausführung hingegen wird vorausgesetzt, dass die Kugeln aus der Tüte herausschauen, denn drei Kugeln passen nicht komplett in eine kleine Tüte. Im Prinzip kann man beide Lösungen gelten lassen, da die Fragestellung die nötige Interpretationsfreiheit zulässt, was einer der Grundgedanken von Fermi-Aufgaben ist (vgl. www.rechenbaer.de).

Beispiel 9: **Wie groß müsste ein entsprechendes Denkmal sein, das Adenauer „von Kopf bis Fuß“ in demselben Maßstab darstellen soll?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte B12)

Abbildung 13

Mögliche Lösung: Die Größe des Kindes beträgt ca. zwei Drittel des Kopfes. Angenommen, das Kind ist ca. 140 cm, dann ist der Kopf:

$$140 : 2 \cdot 3 = 210 \text{ cm}$$

Durch Messungen kann man sehen, dass der Kopf 1/9 des Körpers (Verhältnis 1:8) ist, also:

$$210 \cdot 9 = \underline{\underline{1890 \text{ cm}}}$$

Die Statue wäre ca. 20 m hoch.

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe ist relativ einfach zu lösen und kann theoretisch ab der ersten Klasse eingesetzt werden. Die Schülerinnen und Schüler üben dabei *mit Längeneinheiten zu rechnen und diese umzuwandeln sowie das Rechnen mit Proportionen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 84). Sie müssen erkennen bzw. messen, dass die Größe des Kopfes ungefähr ein Neuntel der Körpergröße beträgt und diese Erkenntnis dann für die Berechnung der Körpergröße der Statue anwenden.

Das Beispiel bietet sich für Gruppen- oder Paararbeit an, da die Schülerinnen einander abmessen können, um die Größe des Kindes zu ermitteln. Sie können beispielsweise annehmen, dass das Kind ungefähr in ihrem Alter ist und somit ihre eigene Körpergröße als Anhaltspunkt nehmen. Außerdem können sie durch gegenseitiges Abmessen auch das Verhältnis von Kopf und Körper ermitteln.

Will man diese Fermi-Aufgabe als Differenzierungsaufgabe anwenden, so können leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler versuchen, die *Körperoberflache* der Statue ermitteln. Hierbei können sie wieder ihre eigene Oberfläche als Ausgangsmaß nehmen oder die benötigten Daten recherchieren und mit diesen arbeiten (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 84).

<u>Beispiel 10:</u> **Dieser Kupferkessel dient zur Käseherstellung in der Hof- und Schaukäserei auf der Ostseeinsel Usedom. Seit 2003 wird in diesem Betrieb Bio-Milch zu Schnitt und Hartkäse verarbeitet. Wie groß ist das Fassungsvermögen des Kessels?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte C3)

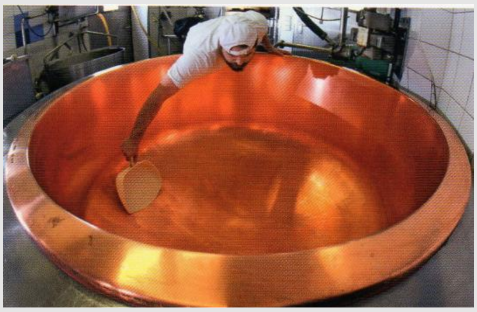

Abbildung 14

<u>Mögliche Lösung:</u> Angenommen, der Kessel entspricht einer Halbkugel. Der Radius des Kessels beträgt ungefähr die Armlänge eines Erwachsenen. Durch Messen erhält man ca. 70 – 80 cm.

$$V_{\text{Halbkugel}} = (4 \cdot \pi \cdot r^3) : 6 = (4 \cdot 3 \cdot 343000) : 6 = \underline{686000 \text{ cm}^3}$$

Der Kessel hat ein Fassungsvermögen von ca. 1 m³.

Einsatz im Unterricht

Das Beispiel kann ab der vierten Klasse eingesetzt werden, sobald sie Schülerinnen und Schüler gelernt haben, wie man das *Volumen von Kugeln bzw. Zylindern berechnet* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 76). Um den Lernenden mit ihren Überlegungen zu helfen, kann man ihnen verschiedene Schüsseln als Modelle in den Unterricht mitbringen. Anschließend können sie entscheiden, mit welchem geometrischen Körper sie den Kessel beschreiben und das Volumen berechnen. Bei diesem

Beispiel besteht wieder die Möglichkeit mehrere Varianten zu vergleichen und abzuschätzen, welche näher an das tatsächliche Fassungsvermögen herankommen könnte.

In der Fermibox wird vorgeschlagen, den *Kopf des Mannes als Anhaltspunkt* für das Schätzen von Dimensionen zu nehmen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 76). Es wäre jedoch einfacher, wie auch in der Ausarbeitung, den Arm des Mannes zu nehmen. Wenn der Mann seinen Arm in die Mitte bewegt, kann man kann sich vorstellen, dass die Armlänge ungefähr dem Radius entspricht. Nimmt man den Kopf als Bezugspunkt, so muss man überlegen, wie oft dieser in den Radius passen könnte. Allein diese Abschätzung könnte schon zu Fehlern führen und die restliche Bearbeitung so beeinflussen, dass unrealistische Lösungen entstehen.

Will man die Aufgabe nicht nur für den regulären Unterricht sondern auch zum Differenzieren anwenden, so kann man folgende Zusatzfragen stellen:

- *Wie schwer ist das Kupfer des Kessels?*
- *Wie viele Schippen Käse passen in den Kessel?* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 76).

Da das Wort Schippe in Österreich eher nicht gebräuchlich ist, sollte man den Lernenden erklären, dass eine Schaufel gemeint ist oder die Frage gleich umformuliert stellen.

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Beispiele, bei denen die Lernenden ihre Informationen aus Bildern oder anderen Abbildungen entnehmen sollen, eignen sich besonders zum Differenzieren und Individualisieren (Lehrplan AHS - Mathematik UST). Leistungsschwächere könnten eventuell Schwierigkeiten haben, ihre Vorstellungen von Dimensionen mit den Bildern zu verbinden. Durch diese kommt nämlich eine zusätzliche Komponente, die beachtet werden muss, dazu. Sie können nämlich nicht ausschließlich ihre eigenen Schätzungen nehmen. Das soll nicht bedeuten, dass keine Annahmen getroffen werden sollen. Sie können nur nicht nach persönlichem Empfinden sondern müssen nach den

Vorgaben des Bildes bzw. der Abbildung handeln. Es ist also nicht möglich, dass die Lernenden behaupten, dass bei Nilpferden das Muttertier nur 4 Mal so groß ist wie das Baby, denn das würde das Foto widerlegen. Um diesen Aufgabentyp zu lösen, muss im Allgemeinen ein Referenzwert, zum Beispiel ein Mensch, gegeben sein, anhand dessen die anderen Werte geschätzt werden können.

Des Weiteren eignen sich die Beispiele zur Anwendung aller Sozialformen. Es ist durchaus möglich, die Fragen alleine zu beantworten. Bei Beispielen, bei denen man Körperteile abmessen soll, ist es aber ratsam im Team zu arbeiten. Dies gilt aber auch bei Beispielen, bei denen verschiedene Arbeitsschritte, wie zum Beispiel Recherchieren und Berechnen, nötig sind, da die Lernenden dadurch Zeit sparen können. Um die Rollenverteilung innerhalb der Gruppe zu bestimmen, ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler miteinander reden, um auf eine Einteilung, die für alle Beteiligten akzeptabel ist, zu finden. Innerhalb der Gruppe müssen außerdem die einzelnen Ideen diskutiert werden und anschließend müssen sich die Lernenden auf einen Lösungsweg einigen. Somit werden die sozialen und kommunikativen Kompetenzen geschult (vgl. Lehrplan AHS - Allgemein).

In Bezug auf die Bildungsstandards können folgende Kompetenzbereiche behandelt werden: H1 – H3, I1 – I3, K3 (vgl. Benesch-Tschanett, Friedl-Lucyshyn und andere 2009: 24,25). Beispiele, die Bilder als Informationsquellen mitliefern, setzen nicht nur voraus, dass die Schülerinnen und Schüler ein Modell erstellen und dieses anschließend berechnen. Sie müssen die Bilder richtig deuten können und Verbindungen zu mathematischen Rechenoperationen herstellen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Bei Beispiel 3 ist es beispielsweise wichtig, dass die Lernenden erkennen, durch welchen geometrischen Körper sie den Körper des Nilpferds ersetzen können, um das Volumen richtig berechnen zu können.

Inhaltlich beschäftigen sich solche Beispiele wieder meist mit Zahlen und Maßen und geometrischen Figuren und Körpern (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11). Es kann aber auch vorkommen, dass sich einige Aufgaben auch mit dem Themenbereich Funktionen beschäftigen, zum Beispiel, wenn die Schülerinnen und Schüler den Geschwindigkeitsverlauf einer Achterbahn anhand ihres Aufbaus beschreiben sollen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: Karte D9). Da solche Fragestellungen eher selten vorkommen, kann man behaupten, dass die Inhaltsbereiche 1 und 3 repräsentativ für diese Art von Fermi-Aufgabe sind.

Die Aufgaben entsprechen dem Komplexitätsbereich 3, da es nicht ausreicht, Grundkenntnisse einzusetzen. Die Schülerinnen und Schüler müssen reflektieren, welche mathematischen Operationen sinnvoll sind, müssen ihre Lösungswege planen und gegebenenfalls wieder ändern etc. (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

4.2. Anzahlen und Größen durch Schätzen und Überschlagen erhalten

Bei dieser Art von Beispielen geht es nicht darum, dass die Schülerinnen und Schüler Beispiele wirklich berechnen, sonder darum, mit ihnen gegebenen Mitteln ein sinnvolles Ergebnis zu schätzen.

Beispiel 11: **Wie viele Haare wachsen auf deinem Kopf?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte B6)

Mögliche Lösung: Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler schätzen, wie groß die menschliche Kopfhaut ist. Sie können dazu ein Blatt Papier in Streifen schneiden und sie anschließend den Kopf damit auslegen. Anschließend zählen sie ab, wie viele Haare auf einem Quadratzentimeter sind.

Angenommen, die Kopfhaut hat ca. 400 cm^2 und auf einem Quadratzentimeter befinden sich 300 Haare:

$$400 \cdot 300 = \underline{\underline{120000}}$$

Also besitzt der Mensch ca. 100000 Haare.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Informationen aus dem Internet oder anderen Quellen, so kann man feststellen, dass das der Mensch zwischen 88000 und 150000 Haaren besitzt und die Überlegung somit gerechtfertigt ist (vgl. http://de.wikibooks.org/wiki/Mensch_in_Zahlen).

Einsatz im Unterricht

Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits in der Lage sind, mit *Flächeninhalten und großen Zahlen zu rechnen und Flächeninhalte umzuwandeln*. Da dies bereits ab Ende des ersten Halbjahres der ersten Klasse der Fall ist, kann die Aufgabe bereits in der 5. Schulstufe eingesetzt werden und eignet sich zur Festigung und Übung des soeben gelernten Inhalts (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010*:* 72). Natürlich spricht nichts dagegen, dieses Beispiel auch in höheren Klassen zu verwenden, da es häufig vorkommen kann, dass die oben genannten Fähigkeiten wieder vergessen werden und somit aufgefrischt werden müssen.

Um den Lernenden die Berechnung zu erleichtern, kann man ihnen Papierstreifen zur Verfügung stellen, mit denen sie die Fläche des Kopfes, auf der Haare wachsen, berechnen. Da dieser Vorgang und auch das Abzählen von Haaren alleine kaum zu bewältigen ist, ist es ratsam, die Schülerinnen und Schüler in Paaren bzw. Kleingruppen arbeiten zu lassen. Dabei ist aber zu beachten, dass ältere Schülerinnen und Schüler *ab der siebten Schulstufe Berührungsängste* haben können. Um diesem Problem entgegenzuwirken, wäre es ratsam, es den Schülerinnen und Schülern freizustellen, mit wem sie zusammenarbeiten möchten (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010*:* 72).

In höheren Klassen ist die Berechnung mit Hilfe der Papierstreifen beinahe überflüssig. Wissen die Schülerinnen und Schüler bereits, wie man die Oberfläche einer Kugel berechnet, so können sie den Kopfdurchmesser abmessen und annehmen, dass er behaarte Teil des Kopfes einer Halbkugel entspricht. Somit müssen sie die Oberfläche der Halbkugel berechnen und anschließend schauen, wie viele Haare pro Quadratzentimeter zu finden sind.

Beispiel 12: **Wie viele Briefe trägt ein Briefträger im Jahr aus?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte F3)

Mögliche Lösung 1: Die Schülerinnen und Schüler fragen zuhause ihren Briefträger oder ihre Briefträgerin, wie viele Briefe er oder sie im Schnitt pro Tag liefert und multipliziert diese Angabe dann mit den Arbeitstagen eines Jahres.

Mögliche Lösung 2: Die Lernenden gehen von der Einwohnerzahl ihrem Stadtteil/Dorf etc. aus und nehmen an: In einem Dorf gibt es eine/n Briefträger/in und ca. 1500 Einwohner. Pro Haushalt leben im Schnitt 3 Menschen, das heißt 500 Haushalte. Pro Tag bekommt jeder Haushalt ca. 2-3 Briefe (können die Lernenden von ihrer eigenen Post annehmen).

Dies würde zu folgender Rechnung führen:

$$500 \cdot 2 = 1000 \ldots \text{Briefe pro Tag}$$

Nun hat ein Jahr 52 Wochen, wovon an 5 Tagen gearbeitet wird (Feiertage nicht berücksichtigt), das heißt an 260 Tagen im Jahr:

$$1000 \cdot 260 = \underline{\underline{260000}} \ldots \text{Briefe pro Jahr in einem kleineren Dorf}$$

Diese beiden Lösungen sind natürlich nicht die einzig möglichen. Man könnte noch andere Aspekte, wie zum Beispiel eine Großstadt mit Einteilung in politische Bezirke, die Feiertage, an denen keine Post gebracht wird, usw. mit einbeziehen und das Beispiel komplexer machen.

Einsatz im Unterricht

Bezüglich mathematischer Kompetenzen erfordert diese Aufgabe lediglich das *Rechnen mit Zeiteinheiten und den Umgang mit großen Zahlen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010*:* 142). Dennoch ist es ratsam, dieses Beispiel nicht gleich in den ersten Klassen der Unterstufe einzusetzen, da es eine Verknüpfung vieler verschiedener Informationen erfordert, was die jüngeren Schülerinnen und Schüler womöglich überfordern könnte. Entscheidet man sich dennoch, diese Frage bereits in der ersten Klasse einzusetzen, sollte man sich eventuell auf Lösungsmöglichkeit 1 beschränken, sofern die Lernenden nicht zu schüchtern sind, um möglicherweise fremde Menschen um Auskunft zu bitten. Generell kann man auch behaupten, dass Lösungsweg 1 in einer kommunikativen und geselligen Klasse wahrscheinlich besser aufgenommen wird als in einer sehr ruhigen Klasse, da die letzteren womöglich zu schüchtern sind, um nach Auskunft zu bitten. Bezüglich Lösung 1 kann die Frage aufkommen, ob sie wirklich Fermi-spezifisch ist. Um dies zu umgehen, kann man den Schülerinnen und Schülern die Anweisung geben, den Boten zwar zu befragen, aber die Zahlen nicht eins zu eins zu übernehmen, sondern zu runden. Da dies aber als trivial angesehen werden kann, kann man Lösung 1 als typische Vorübung zum Beantworten von Fermi-Fragen sehen.

Dadurch, dass es, wie schon oben angeführt, mehrere Lösungswege gibt, eignet sich diese Aufgabe für einen differenzierten Unterricht. Je nach mathematischer Begabung der Schülerinnen und Schüler, können sie wählen, mit welcher Schwierigkeit und mit welchen Kriterien sie arbeiten wollen. Das heißt, sie können selbstständig entscheiden, wie viele Details sie bei der Bearbeitung berücksichtigen wollen und auch können.

Um den Schülerinnen und Schülern solche detaillierten Ausarbeitungen zu ermöglichen, kann man ihnen den Einsatz von Suchmaschinen im Internet bzw. die Homepage der österreichischen Post, die möglicherweise die benötigten Informationen beinhaltet, anbieten. Außerdem kann man ihnen folgende Fragen als Denkanstoß stellen:

- *Wie viele Häuser erreicht er am Tag?*
- *Wie lange arbeitet er am Tag?*
- *Verteilt ein Briefträger nur Briefe?* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010*:* 142).

Diese Fragen helfen aber nicht nur, zu einem Ergebnis zu kommen sondern auch dieses kritisch zu betrachten. Die Schülerinnen und Schüler können hinterfragen, ob ihre Lösung im Zeitalter von Emails realistisch ist. Außerdem können sie darüber nachdenken, ob die Einbeziehung von Werbematerial ihr Ergebnis verändern würde und ob sie dabei jeden Flyer berücksichtigen oder jedes Bündel von Reklamematerial zählen würden.

Beispiel 13: **Wie viele Brötchen (belegt mit Wurst oder Käse) müsste ein Bäcker in der Pause an deiner Schule bereithalten?** (vgl. Maaß 2007: 56)

Mögliche Lösung 1: Die Schülerinnen und Schüler befragen den Bäcker (sofern wirklich ein Schulbüffet existiert).

Mögliche Lösung 2: Angenommen, es gibt in einer AHS acht Jahrgänge mit jeweils 3 Klassen mit 30 SchülerInnen. Davon kauft jede/r zweite ein Brötchen.

$$3 \cdot 8 \cdot 30 = 720$$

$$720 : 2 = \underline{\underline{360}}$$

Das heißt, der Bäcker müsste ca. 360 Brötchen vorbereiten

Abhängig von der Schülerzahl, kann diese Berechnung durchaus treffend sein.

Einsatz im Unterricht

Dieses Fermi-Problem kann als durchaus einfach eingestuft werden. Aus diesem Grund kann man es gleich zu Beginn der fünften Schulstufe einsetzen, wenn zum Beispiel die Grundrechnungsarten wiederholt werden. Da die Überlegungen, die die Schüler anstellen müssen, eher unkompliziert sind, kann man diese Aufgabe als Einstieg in das selbstständige und offene Lernen nehmen. Es kommt häufig vor, dass Schülerinnen und Schüler nach dem Wechsel von Volksschule an eine allgemeinbildende höhere Schule mit dem eigenständigen Arbeiten überfordert sind. Deshalb ist es ratsam, den Lernenden Aufgaben zu stellen, die sehr einfach zu lösen sind und bei denen sie der neuen Lernsituation mehr Beachtung schenken können.

Tritt nun der Fall auf, dass sich einige Schülerinnen und Schüler unterfordert fühlen, bzw. will man die Aufgabe auch in höheren Jahrgängen einsetzen, so kann man zusätzliche Aspekte, die berücksichtigt werden müssen, einbauen:

- Gibt es in jedem Jahrgang gleich viele Klassen?
- *Unterscheide zwischen den verschiedenen Belägen. (Wie viel Wurst, wie viel Käse?)*

- *Wird noch eine dritte Speise, z.B.: Kuchen, angeboten*? (vgl. Maaß 2007: 56)

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Die Anforderungen des Lehrplans werden durch diese Art von Fermi-Aufgaben insofern erfüllt, da sie verschiedene Unterrichtsformen zulässt. So kann man die meisten Fragen alleine, aber auch zu zweit oder in Kleingruppen beantworten. Bearbeiten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe nun gemeinsam mit ihren Mitschülerinnen und Mitschülern, so werden ihre sozialen Kompetenzen gefördert. Sie müssen miteinander kommunizieren, um letztendlich zu einem Ergebnis zu kommen. Bei dem Haarbeispiel müssen sie sich ausmachen, wer welche Rolle übernimmt. Das heißt, wer zählt die Haare bzw. wer misst den Kopf ab. Durch das Einteilen der Arbeitsbereiche stärken sie auch ihre Selbstständigkeit und Verantwortungsbewusstsein. Arbeitet einer von ihnen nachlässig, so kann das Ergebnis unrealistische Dimensionen annehmen und somit als zu ungenau angesehen werden (vgl. Lehrplan AHS – Mathematik UST und OST).

Hinsichtlich der Bildungsstandards erfüllen die Aufgaben die Kompetenzbereiche H1, H3, I1. Die Komplexitätsbereiche 1-3 werden nicht von allen Beispielen dieser Art abgedeckt. Kann man eine Aufgabe auf verschiedene Arten und mit unterschiedlichen Details lösen, so entspricht sie womöglich mehr Bereichen als eine simple Aufgabe, die lediglich die Anwendung der Grundrechnungsarten erfordert und in wenigen kurzen Schritten zu bearbeiten ist. Grundsätzlich kann man aber durchaus behaupten, dass die Schülerinnen und Schüler eine Abschätzung oder ein Modell erstellen müssen, welches, zum Beispiel, die Fläche der Kopfhaut und die Menge der Haare auf einem Quadratzentimeter darstellen soll. Anschließend können sie mit den Zahlen und Maßen arbeiten. Sie müssen Größen schätzen und unter Umständen Flächenmaße und Zeiteinheiten umformen und umrechnen. Wenn ihre Berechnungen beendet sind, müssen sie evaluieren, ob das geschätzte Ergebnis auch sinnvoll ist (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10,11).

4.3. Anzahlen und Größen veranschaulichen

Bei dieser Vorstufe von Fermi-Aufgabe geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Größen und Zahlen kennenlernen. Somit wird ihnen beispielsweise die Vorstellung, wie viel Geld vierzig Milliarden Dollar eigentlich sind, vereinfacht, indem man sie berechnen lässt, wie lange es dauert, bis man es zum Fenster rauswirft – im wahrsten Sinne des Wortes (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 8). Veranschaulichungen sollten generell nicht nur in Verbindung mit Fermi-Aufgaben bearbeitet werden, sonder bei jedem Beispiel, das große Dimensionen beinhaltet. Der folgende Aufgabentyp kann den Lernenden aber helfen, sich ein Bild von diversen Größen zu machen und dies auch auf andere Aufgaben zu übertragen.

Beispiel 14: **Passen alle ÖsterreicherInnen um den Neusiedlersee? Können alle auf ihm stehen (wenn er zugefroren ist)? Würden alle in ihn hineinpassen (wenn man das Wasser herausließe)?** (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte D3)

Mögliche Lösung:

Erste Frage: Zunächst müssen die Schülerinnen und Schüler sie Uferlänge schätzen und anschließend auch die Breite eines Menschen. Angenommen, die Uferlänge ist 100 km und die Breite eines Menschen mit leicht gestreckten Armen ca. 1 m, so erhält man:

100000m = 100000 Menschen …könnten rundherum stehen

Zweite Frage: Hierbei müssen die Schülerinnen und Schüler schätzen, wie lang und wie breit der Neusiedlersee ist. Angenommen, er ist 36 km lang und 10 km breit, dann erhält man für die Fläche des Sees:

$$36 \cdot 10 = 360 \text{ km}^2$$

Anschließend berechnet man die Standfläche eines Menschen mit ca. 0,5 m Länge und Breite, also

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 \text{ m}^2 = \tfrac{1}{4} \text{ m}^2 \text{...also 4 Menschen/m}^2\text{, wenn sie eng stehen.}$$

Will man nun die zweite Frage beantworten, so kommt man auf folgendes Ergebnis:

$$400000000 \cdot 4 = 1600000000 = \underline{\underline{\text{1,6 Milliarden Menschen}}}$$

Dritte Frage: Zusätzlich zu Länge und Breite braucht man nun noch die geschätzte Tiefe des Sees (z.B.: 1 m, da er generell eher flach ist) bzw. die geschätzte Höhe eines Menschen (z.B.: 2 m), so erhält man ein Volumen von 400 Millionen m³ und 0,5 m³. Für die Anzahl von Menschen im See bedeutet dies:

$$400000000 : 0{,}5 = \underline{\text{800 Millionen Menschen}}$$

Natürlich können im Zuge der Ausarbeitung auch andere Schätzwerte und Lösungswege verwendet werden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 108).

Einsatz im Unterricht

Die Neusiedlerseeaufgabe hilft den Schülerinnen und Schülern, sich ein Bild von *Längen, Flächen und Volumina* zu machen. Es ist oftmals einfacher, sich eine Ansammlung von Menschen vorzustellen, als eine gewisse Anzahl von Quadratmetern. Außerdem üben die Lernenden das *Rechnen mit Einheiten, den Flächen- und Längenbegriff gegeneinander abzugrenzen und das Schätzen von krummlinig begrenzten Formen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 108). Um die Aufgabe zu berechnen, brauchen die Lernenden außerdem ein gewisses geografisches Wissen, das durch technische Medien oder durch andere Unterrichtsgegenstände gewonnen werden kann. Will man diese Aufgabe in den Unterricht einbauen, so ist es möglicherweise sinnvoll, dies erst ab der sechsten Schulstufe, wenn Volumen erneut bearbeitet wird, zu tun. Die Schülerinnen und Schüler sollten zwar schon früher wissen, wie man das Volumen von Quadern berechnet, sind wahrscheinlich aber mit der komplexen und umfangreichen Aufgabenstellung überfordert (vgl. Lehrplan AHS- Mathematik UST).

Die Neusiedlerseeaufgabe eignet sich zur Differenzierung und Individualisierung im Unterricht. Je nach Begabung des Lernenden kann man die Anforderungen erhöhen. So sollte ein/e mathematisch interessierte/r SchülerIn mit detaillierten Werten arbeiten bzw. alle drei Fragen ausführlich beantworten. Die anderen, für die Mathematik nicht so einfach ist, sind möglicherweise mit der ersten und der zweiten Frage ausreichend beschäftigt (vgl. Henn 2003: 90). Haben Schülerinnen und Schüler *Schwierigkeiten*, Lösungsansätze zu finden bzw. sich die *Längen, Flächen und Volumina vorzustellen*, kann man sie in Gruppen einteilen und sie *eine kurze Menschenkette nachbauen* lassen bzw. können sie an ihren Mitschülern Maß nehmen. Dies bedeutet gleichzeitig, dass die Aufgabe mehrere Sozialformen ermöglicht – entweder alleine oder in Kleingruppen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 108).

Sollte die Menschenkette nicht ausreichend sein, kann man zusätzliche Fragen stellen:

- *Wie kann man sich die Form des Neusiedlersees vereinfacht vorstellen, damit man etwas berechnen kann?*
- *Wie sieht eine Figur aus, die denselben Umfang/dieselbe Oberfläche wie der Neusiedlersee hat?*
- *Wie eng können Menschen stehen?* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 108)

Beispiel 15: **Wie lange würdest du brauchen, um einen 8-Gigabyte-USB-Stick vollzutippen?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte C10)

Mögliche Lösung: Angenommen, man *würde 8 Stunden täglich ohne Pause 60 Buchstaben pro Minute tippen*, dann hätte man am Ende des Tages ca. 30000 Buchstaben geschrieben und in einem Jahr wären das ca. 10 Millionen getippte Buchstaben:

$$60 \cdot 60 \cdot 8 = 28800$$

$$28800 \cdot 365 = 10512000$$

Nun weiß man, dass ein Gigabyte 10^9 Byte entspricht, also sind 8 Gigabyte ca. $8 \cdot 10^9$ Byte. Nun muss man nur noch die 8 GB durch die getippten Byte/Jahr dividieren:

$$8 \cdot 10^9 : 10^7 = \underline{\underline{8 \cdot 10^2 \text{ Jahre}}} \text{ …also 800 Jahre}$$

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 91*)

Die genauen Werte bezüglich Gigabyte können auf Wikipedia (Byte) nachgeprüft werden.

Einsatz im Unterricht

Computer spielen im täglichen Leben der meisten Schülerinnen und Schüler eine große Rolle. Die meisten können verschiedenste Arten von Programmen bedienen, installieren etc., doch sie wissen oftmals nicht, was sich hinter all den ganzen Begriffen, die mit Computern und Internet verbunden sind, verbirgt. Die Aufgabe soll den Schülerinnen und Schülern helfen, sich ein Bild von der Dimension eines Gigabytes zu machen. Häufig weiß man nur, dass man bei acht GB ziemlich viel Speicherplatz zur Verfügung hat, doch Genaueres können sich nur die wenigsten Menschen vorstellen.

Die Aufgabe dient aber nicht nur zum Veranschaulichen von Dimensionen sondern auch zur Übung und Festigung von *Rechnen mit Potenzen und großen Zahlen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 91*). Um das Beispiel bearbeiten zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, mit Zehnerpotenzen zu rechnen, was laut Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen bereits in der Unterstufe, ab der dritten Klasse, der Fall ist.

Um sich Anregungen für die Herangehensweise an das Beispiel zu holen, können die Schülerinnen und Schüler selbstgetippte Dateien betrachten und sich überlegen, wie viel sie in einer gewissen Zeitspanne tippen. *Die* *tatsächliche Dateigröße können sie anschließend in den „Eigenschaften" herausfinden*. Mit diesen Informationen können sie sich dann ein Modell für die Anzahl der getippten Buchstaben in einem Jahr machen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 90*). Informationen bezüglich der Größe und Umrechnung von Gigabytes können sich die Lernenden aus dem Internet bzw. aus anderen Unterrichtsgegenständen, wie Informatik, holen.

Für besonders schnelle Rechner, kann man die Fragestellung auch erweitern und ausbauen:

- *Wie lange würde es dauern, wenn du dir alle Lieder anhören würdest, die man auf diesem USB-Stick abspeichern kann?*
- *Wie lange würde es dauern, wenn du dir alle Filme anschauen würdest, die man auf diesem USB-Stick abspeichern kann?*
- *Wie groß wäre die Fläche, die man mit Fotos bedecken kann, die man auf dem USB-Stick abspeichern kann?* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 90*)

Die ersten beiden Fragen können einfach durch Ausprobieren beantwortet werden, sofern die Schülerinnen und Schüler einen entsprechenden USB-Stick besitzen. Es gibt Programme, die einem die gesamte Spielzeit anzeigen. Sollte kein USB-Stick vorhanden sein, können die Lernenden schauen, wie groß eine Datei ist und wie lange die Abspieldauer ist. Anschließend können sie abschätzen, wie viele solcher Dateien auf den USB-Stick passen. Die Antwort der dritten Frage kann so erstellt werden, indem man betrachtet, welche Maße ein Foto hat und wie viel Speicherplatz es beansprucht. Anschließend kann man so wie bei den Filmen und Liedern vorgehen.

Beispiel 16: **Wie lang bräuchte man, um ein Lichtjahr zu fahren?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte B5)

Mögliche Lösung: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 300000 km/ Sekunde. In einem Jahr wären das dann:

$$300000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 9{,}5 \cdot 10^{12} \text{ …ca. 9 Billionen km/Jahr}$$

Nimmt man an, dass man kontinuierlich 100 km/h fährt, so fährt man pro Jahr:

$$100 \cdot 24 \cdot 365 = 876000 \text{ …ca. 900000 km/Jahr}$$

Um die herauszufinden, wie lange man mit dem Auto braucht, um ein Lichtjahr zu fahren:

$$9 \cdot 10^{12} : 9 \cdot 10^{5} = \underline{\underline{10^{7}}} \text{ …10 Millionen Jahre}$$

Die Daten bezüglich Lichtgeschwindigkeit und Lichtjahr, können, zum Beispiel, auf Wikipedia überprüft werden.

Einsatz im Unterricht

Viele Schülerinnen und Schüler wissen bereits in der Unterstufe durch den Physikunterricht, was Lichtgeschwindigkeit und Lichtjahr bedeuten. Doch kaum jemand von ihnen kann richtig einschätzen, wie schnell 300000 km/s sind. Dies kann mit dieser Vorstufe zur Fermi-Aufgabe erleichtert werden.

Da die Schülerinnen und Schüler in der achten Schulstufe der allgemeinbildenden höheren Schule das Thema „Licht“ durchnehmen und bereits in den Jahren zuvor im Mathematikunterricht gelernt haben, wie man mit Zehnerpotenzen rechnet, sollte das Beispiel ab der achten Schulstufe ohne größere Probleme zu lösen sein (vgl. Lehrplan AHS - Physik UST). Haben die Lernenden die Daten bezüglich Lichtjahr und Lichtgeschwindigkeit nicht mehr im Kopf, so können sie entweder ihre Physikunterlagen oder Quellen aus dem Internet zu Hilfe nehmen.

Wie auch im vorhergehenden Beispiel üben die Schülerinnen und Schüler nicht nur das Rechnen mit (Zehner)*Potenzen* sondern auch das *Rechnen mit Längen- und Zeiteinheiten.* Außerdem können sie auch ihre Fähigkeiten, sinnvoll zu runden, verbessern (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 56*).

Sind Lernende schon früher mit der Aufgabenstellung fertig, so gibt es auch hier wieder einige mögliche Zusatzfragen:

- *Wie viele Tankstellen müsste man unterwegs anfahren?*
- *Unser Sonnensystem hat einen Durchmesser von 11 Lichtstunden. Wie weit ist das?* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse 2010: 56*)

Bei der ersten Zusatzfrage, müssen die Schülerinnen und Schüler noch in Erfahrung bringen, wie weit man durchschnittlich mit einem vollen Tank kommt und dies in die Rechnung mit einbeziehen. Bei der zweiten Aufgabe sollen sie von der Lichtgeschwindigkeit ausgehend berechnen, wie weit eine Lichtstunde ist, und anschließend, wie weit elf sind.

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Der Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen in Österreich verlangt, dass die Schülerinnen und Schüler angeregt werden, Erlerntes nicht einfach hinzunehmen, sondern es auch zu *hinterfragen und kritisie*ren (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein). Durch die oben ausgearbeiteten Aufgaben wird es den Lernenden erleichtert, Informationen, die nicht notwendigerweise ausschließlich in Mathematik gelehrt wurden, nicht einfach hinzunehmen, sondern zu veranschaulichen. So wissen sie nicht nur, wie schnell sich das Licht ausbreitet, sondern können sich durch den Vergleich mit einem Auto ein Bild von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit machen. Sind die Schülerinnen und Schüler einmal in der Lage, solche Modelle zu bilden, können sie jegliche Art von Angabe, auf die sie außerhalb der Schule treffen, hinterfragen und kritisieren. Solch eine Fähigkeit wirkt sich *positiv auf ihr Selbstvertrauen* aus und kann sie für ihr weiteres Leben bestärken (vgl. Henn 2003: 90). Um den Lernenden auch wirklich vermitteln zu können, dass sie Fähigkeiten, die sie im Unterricht erwerben auch in ihr alltägliches Leben mitnehmen können, ist es wichtig, dafür zu sorgen, dass ein *Realitätsbezug* gegeben ist. Dies ist durch Fermi-Aufgaben leicht zu erreichen. Lichtgeschwindigkeit, der Neusiedlersee und USB-Sticks sind Themen, die den Schülerinnen und Schülern mit ziemlicher Sicherheit auch ohne Schule ein Begriff sind. Das heißt, sie können unter Umständen ihr *Alltagswissen* in ihre Problembehandlung mit einbeziehen, was durchaus motivierend sein kann (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem).

In Anbetracht der Bildungsstandards kann man behaupten, dass diese Art von Fermi-Aufgabe die *Kompetenzbereiche H1, H2, I1, I3 und K1 – K3* (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10, 11). *Darstellen und Modellbilden* bedeutet, *eine Repräsentationsform durch eine andere darzustellen*. Beim Veranschaulichen transferieren die Schülerinnen und Schüler eine unübersichtliche Größe in eine ihnen bekannte bzw. überschaubarere. *Rechnen und Operieren* fordert von den Lernenden nicht nur, dass die Beispiele gerechnet werden, sondern auch, dass die Schülerinnen und Schüler Wege finden, die Aufgaben zu lösen. Das bedeutet auch, dass sie Computer und andere Medien einsetzen, um die nötigen Eckpunkte für das Problem zu finden (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Beim Veranschaulichen von Informationen ist das insofern von Bedeutung, da die Schülerinnen und Schüler erst einmal zu den Ausgangsdaten kommen müssen. Fermi-Aufgaben sind ja, wie schon oft in dieser Arbeit erwähnt, so aufgebaut, dass sie den Schülerinnen und Schülern gewissen Informationen vorenthalten, um sie anzuregen, sie selbst zu beschaffen (vgl. Greefrath 2010: 80).

Bezüglich des Inhalts arbeiten die Lernenden bei diesen speziellen Veranschaulichungsaufgaben meistens mit *Zahlen und Maßen bzw. geometrischen Figuren und Körpern*. Sie arbeiten zum Beispiel mit Geschwindigkeiten und Längenmaßen bzw. berechnen Flächen. Da es bei Fermi-Aufgaben nicht darum geht, auf exakte, sondern möglichst vereinfachte aber dennoch treffende Lösungen zu kommen, müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeit zu runden anwenden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller *Die Fermibox 8. – 10. Klasse*: 2).

4.4. Kombinieren von Schätzen und Veranschaulichen

Wie die Überschrift bereits sagt, ist diese Art von Aufgabe eine Verknüpfung der vorhergehenden Beispieltypen. Das heißt die Schülerinnen und Schüler müssen gleichzeitig schätzen und veranschaulichen.

Beispiel 17: **Wie hoch wäre ein Turm aus dem Papier, das in deiner Schule jedes Jahr für Kopien verbraucht wird?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte A9)

Mögliche Lösung: Angenommen, eine Klasse von ca. 30 SchülerInnen bekommt in zwei Fächern pro Tag je 1 Kopie ausgehändigt und das an 5 Schultagen, außerdem wird angenommen, dass in einem Gymnasium pro Jahrgang drei Klassen sind:

$$30 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 = 7200 \text{ Kopien pro Woche}$$

Anschließend wird angenommen, dass es ca. 40 Schulwochen gibt:

$$7200 \cdot 40 = 288000 \text{ Kopien pro Jahr}$$

Nun kann man durch Abmessen eines Papierstapels errechnen, dass ein Blatt Papier 0,1 mm dick ist:

$$288000 \cdot 0{,}1 = 28800 \text{ mm} = \underline{\underline{28{,}8 \text{ m}}}$$

Das heißt, der Turm wäre ca. 30 m hoch.

Einsatz im Unterricht

Die Aufgabe setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler bereits mit dem Rechnen mit Dezimalzahlen bzw. dem Arbeiten mit Längenmaßen vertraut sind. Dies ist zwar bereits in der fünften Schulstufe der Fall. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, wäre es dennoch sinnvoll, die Aufgabe erst ab der sechsten Schulstufe einzusetzen, denn die jüngeren Schülerinnen und Schüler haben oftmals Probleme, sich solche Sachverhalte vorzustellen. Außerdem schreibt der Lehrplan erst ab der zweiten Klasse vor, mit komplexeren Sachverhalten zu arbeiten (Lehrplan AHS – Mathematik UST). In der zweiten Klasse sind die Lernenden bereits mit den zum Lösen benötigten Rechenvorgängen, wie zum Beispiel Dezimalrechnung, vertrauter und können diese mit selbstständig erarbeiteten Lösungswegen verbinden. Dadurch können sie sich auf das Finden der Lösungsschritte konzentrieren und nicht auf das Rechnen selbst.

Will man die Aufgabe nun in den Unterricht einbauen, so sollte man dies tun, wenn man bereits Gelerntes, zum Beispiel nach dem Sommer, wieder aufrufen möchte – das heißt, zum Wiederholen und Festigen. Die Aufgabe kombiniert *Rechnen mit Zahlen, Längen und Längenmaßen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 54).

Um die Anzahl der Kopien pro Jahr schätzen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler Informationen einholen. Dies kann entweder dadurch erfolgen, dass sie die *Person, die für die Bestellung des Kopierpapiers zuständig ist, befragen.* Diese Person weiß in der Regel auch Bescheid, wie viel Papier pro Woche verbraucht wird. Es stellt sich allerdings die Frage, ob bei einer Befragung der herausfordernde Charakter von Fermi-Fragen erhalten bleibt. Deshalb sollte man eher eine andere Möglichkeit in Betracht ziehen, nämlich den *Verbrauch der Klasse für einen gewissen Zeitraum zu beobachten* bzw. zu schätzen und dann auf ein Jahr hochrechnen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 54).

Beispiel 18: **Wegen Hochwasser mussten in den letzten Jahren immer wieder Städte oder Stadtteile entlang der Elbe geräumt werden. Die Menschen wurden in Notunterkünften untergebracht. Als derartige Notunterkünfte werden auch häufig Turnhallen benutzt. Wie viele Menschen könnten in eurer Turnhalle auf Matratzenlagern untergebracht werden?** (Maaß 2007: 100)

Mögliche Lösung: Angenommen die SchülerInnen nehmen die Normfläche einer Sporthalle von 15 m x 27 m als Ausgangsfläche und planen 2 m² pro

Person als Liegefläche, 2 m² zwischen den Liegen und 2 m² als Wegfläche ein, dann erhalten wir folgende Rechnung:

$$(15 \cdot 27) : 6 = \underline{\underline{67,5}}$$

Das heißt, man könnte rund 67 Personen in der Halle unterbringen.

Die Informationen bezüglich der Maße einer in Österreich üblichen Turnhalle findet man z.B. auf http://www.bewegung.ac.at/index.php?id=88.

Einsatz im Unterricht

Dieses Beispiel erfordert nur, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Grundrechnungskompetenzen einsetzen. Das heißt, es kann bereits ab der *fünften Schulstufe* eingesetzt werden. Um sich die Berechnung und die Überlegungen zu erleichtern, kann eine Skizze angefertigt werden, wobei beachtet werden muss, dass die *Abmessungen richtig eingezeichnet* werden, und nicht Schlafsack neben Schlafsack liegt (vgl. Maaß 2007: 100). Ansonsten sollte das Problem für die meisten Schülerinnen und Schüler relativ rasch zu lösen sein, sofern sie die Maße der Turnhalle wissen. Um an diese Information zu gelangen, können sie entweder die Halle selbst abmessen oder im Internet nach der Standardgröße für Turnsäle recherchieren. Da die meisten Lernenden mit den Bodenmarkierungen vertraut sind und wissen, dass ein Basketballfeld den Saal fast ausfüllt, ist es auch ausreichend die Maße des Spielfeldes zu verwenden.

Setzt man die Aufgabe im Unterricht ein, so kann man dies im Zuge der Bearbeitung von Textaufgaben über Grundrechnungsarten tun. Die Aufgabe sollte von der gesamten Klasse gelöst werden, eignet sich aber auch zum Differenzieren. Schülerinnen und Schüler, die früher fertig sind, können zusätzliche Merkmale, wie zum Beispiel einen *Essensplatz in die Berechnung einbauen* (Maaß 2007: 100). Das heißt, von der Gesamtfläche müsste eine gewisse Anzahl von Quadratmetern abgezogen werden und dann erst müsste dividiert werden.

Beispiel 19: **Wie hoch wäre der Berg, wenn man den Müll, der an eurer Schule in einem Jahr anfällt, an einer Stelle sammelt?** (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte C7)

Angenommen, in der Schule gibt es ca. 40 Mülleimer zu je 60 Litern Fassungsvermögen und den Maßen (im mm) 590 x 280 x 560. Die Eimer sind jeden Tag voll und werden entleert.

Pro Tag: $40 \cdot 60 = 2400$ Liter

Pro Schulwoche: $2400 \cdot 5 = 12000$ Liter

Pro Schuljahr mit ca. 40 Wochen: $12000 \cdot 40 = 48000$ Liter

Stapelt man die Eimer blockweise (4 Eimer x 4 Eimer), so entspricht die unterste Reihe:

$$A = (600 \cdot 4) \cdot (300 \cdot 4) = 2880000 \text{ mm}^2$$

$$V = 3000000 \cdot 600 = 1800000000 \text{ mm}^3 = 1800 \text{ dm}^3$$

Daraus folgt:

$$50000 : 2000 = \underline{\underline{25 \text{ m}}}$$

Der Berg ist ca. 25 m hoch.

Maße für Mülleimer findet man unter anderem auf: http://www.schaefer-shop.at.

Einsatz im Unterricht

Dieses Beispiel eignet sich ab der zweiten Klasse. Die Schülerinnen und Schüler sollen bereits einen Begriff von Volumen haben und diesen vertiefen. In der vorhergehenden Klasse, werden laut Lehrplan für AHS bereits das Volumen von Quadern und Würfeln und die dazugehörigen Maßeinheiten durchgenommen, dennoch fehlt es einigen Schülern noch an Vorstellungskraft. Somit bietet sich diese Aufgabe an, die *Grundvorstellungen von Volumina* in der sechsten Schulstufe zu vertiefen. Außerdem wiederholen die Schülerinnen und Schüler erneut den *Umgang mit großen Zahlen* und gleichzeitig auch die schriftliche Multiplikation und Division mit mehrstelligen Zahlen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 100).

Die Schwierigkeit dieses Beispiels könnte darin liegen, eine passende Form für den Müllberg zu finden. Einige Schüler würden automatisch an einen Kegel oder eine Halbkugel denken, doch dies würde ihre Fähigkeiten in dieser Altersstufe noch überschreiten. Als Lehrperson kann man den Lernenden Anregungen geben, wie so ein Berg aussehen solle und woher sie die Maße eines Mülleimers bekommen. In der Fermibox wird vorgeschlagen, dass die Eimer übereinander zu einer Säule gestapelt werden und dass man die Maße eines Eimers durch Abmessen bekommt (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 100). Unter Umständen könnte man aber behaupten, dass eine Säule nicht der Vorstellung eines Berges entspricht, denn dieser ist breit und massiv. Außerdem ist es eher unrealistisch, dass man einzelne Eimer so hoch stapeln könnte, ohne dass die Säule kippt.

Da diese Frage einige verschiedene Überlegungen beinhaltet, könnte man die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen arbeiten lassen. So können Ideen gesammelt werden und die plausibelsten können in die Rechnung mit einbezogen werden. Komplett selbstständiges Arbeiten könnte die lernschwächeren Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe überfordern, was durch eine Gruppenarbeit verhindert werden kann.

Will man diese Aufgabe in höheren Klassen einsetzen, so kann man durchaus sagen, dass die Schüler berechnen sollen, welche Maße der Müllberg haben müsste, wenn er die Form eines Kegels oder einer Halbkugel haben würde.

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Bei Beispielen, die Schätzen und Veranschaulichen kombinieren, wird der Bezug von Fermi-Aufgaben zum realen Leben sehr deutlich. Viele schulübliche Beispiele machen oftmals nur den Eindruck, als seien sie realitätsnahe, sind aber in Wirklichkeit stark konstruiert und haben mit dem alltäglichen Leben der Lernenden nichts zu tun (vgl. Maaß 2007: 11). Bei Fermi-Aufgaben ist eben dies anders. In allen drei ausgearbeiteten Fragen bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Probleme ihres unmittelbaren Umfelds bzw. Situationen, die wirklich eintreten können (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein). Natürlich wird kein Müllberg vor der Schule gestapelt, aber die Lernenden werden dazu veranlasst, sich mit dem Thema Müll und Mülltrennung zu beschäftigen.

Können die Schülerinnen und Schüler nun solch einen Bezug erkennen, kann es ihnen helfen, die gelernten Inhalte besser zu verstehen und zu behalten. In weiterer Folge wirkt sich dies positiv auf die Motivation der Lernenden aus (vgl. Maaß 2007: 16). Durch besseres Verständnis des Inhalts können die Schülerinnen und Schüler leichter Lösungswege finden, da sie ihre volle Aufmerksamkeit ihrer Strategie widmen können. Dies führt wiederum dazu, dass die Lernenden schneller Erfolgserlebnisse haben können, was wichtig für die Persönlichkeitsbildung ist, da sie bestärkt werden, selbstständig zu arbeiten (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein).

Fermi-Fragen, die Schätzen und Veranschaulichen verknüpfen, eignen sich gut zum Differenzieren aber auch zur Anwendung verschiedener Sozialformen. Da die Lernenden viel selbst messen müssen, ist es von Vorteil, wenn sie im Team arbeiten. Dies beschleunigt den Arbeitsprozess und unterstützt gleichzeitig diejenigen, die mit Mathematik nicht so vertraut sind. Das bedeutet nicht, dass nur die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler arbeiten sollen, sondern dass sie den anderen in der Gruppe Denkanstöße und Hilfestellungen geben können.

Bezüglich der Bildungsstandards dient diese Art von Fermi-Aufgaben zur Erfüllung folgender Kompetenzbereiche: H1, H2, I1, I3, K1, K2, K3 (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10, 11). Da diese Aufgaben eine Kombination der Aufgaben der beiden vorherigen Kapitel sind, erfüllen sie auch die gleichen Kriterien. Die Schülerinnen und Schüler müssen Modelle erstellen, die, zum Beispiel, den Stapel an Kopien repräsentieren sollen, bzw. müssen Annahmen und Verallgemeinerungen vornehmen, um ihr Modell überhaupt aufstellen zu können. Außerdem müssen die Lernenden ihre konkreten Rechnungen durchführen, um ihre Annahmen zu bestätigen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10).

Inhaltlich befassen sich Aufgaben, die Veranschaulichen und Kombinieren verbinden, häufig mit dem Rechnen mit Zahlen und Maßen und mit geometrischen Körpern und Figuren. So werden in den drei ausgearbeiteten Fragen Längenmaße umgewandelt und der Begriff Volumen wieder aufgegriffen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

Bezüglich Komplexität sind wiederum alle drei Bereiche vertreten. Am häufigsten wohl Komplexitätsbereich 3, bei dem die Schülerinnen und Schüler über Zusammenhänge und anschließend über ihre Lösungswege nachdenken müssen. Sie müssen überprüfen, ob ihre Annahmen auch passend sind und ihre Ergebnisse realistische Dimensionen haben (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

4.5. Fehlende Daten aus dem Alltag entnehmen

Hierbei sollen die Lernenden nur Informationen zur Lösung des Problems nehmen, die sie aus ihrem alltäglichen Leben wissen bzw. schon in anderen Fächern gelernt haben. Es ist aber grundsätzlich nicht nötig, nach Daten zu recherchieren.

Beispiel 20: **Wie viel wiegen alle Schülerinnen und Schüler deiner Schule zusammen?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte A8)

Mögliche Lösung: Angenommen, an der Schule sind pro Jahrgang 3 Klassen – also in der Unterstufe 12 und in der Oberstufe ebenfalls. In der Unterstufe sind pro Klasse 30 S&S mit ca. 40 kg und in der Oberstufe sind pro Klasse 25 S&S mit ca. 60 kg:

$$12 \cdot 30 \cdot 40 + 12 \cdot 25 \cdot 60 = \underline{\underline{32400\ \text{kg}}}$$

Einsatz im Unterricht

Da diese Fermi-Frage relativ einfach zu beantworten ist, kann sie bereits ab der ersten Klasse AHS eingesetzt werden, nämlich beim Üben des Rechnens mit Grundrechnungsarten und im *Zusammenhang mit Gewichten und deren Maßeinheiten*. Außerdem kann die Aufgabe als Einführung des *Mittelwerts* dienen. Dieser ist zur Lösung nicht unbedingt notwendig, doch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können bereits vorgreifen und sich dessen Berechnung erarbeiten (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 52).

Das Beispiel eignet sich folglich nicht nur zum selbstständigen Festigen von Gelerntem sondern kann auch zur Binnendifferenzierung eingesetzt werden. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können zwischen Unter- und Oberstufe unterscheiden, können unterschiedliche Klassenstärken und Durchschnittsgewichte einbauen. Leistungsschwächere hingegen könnten für alle Altersstufen das gleiche Gewicht annehmen.

Bezüglich Sozialform kann diese Frage durchaus alleine bearbeitet werden. Möchten die Lernenden jedoch das Durchschnittsgewicht nicht nur (von ihrem eigenen ausgehend) schätzen, so können sie das Gewicht ihrer Klassenkollegen und Kolleginnen erfragen und daraus einen Mittelwert errechnen. Lässt es die Zeitplanung zu, könnten die Lernenden *pro Jahrgang eine Klasse befragen* und daraus die benötigte Information erlangen. Ist dies der Fall, so können die Schülerinnen und Schüler in Kleingruppen arbeiten und gegebenenfalls auch die errechneten Daten untereinander austauschen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 52).

Die einzige Schwierigkeit, die bei diesem Beispiel auftreten könnte, ist keine mathematische sondern die Tatsache, dass sich einige Schülerinnen und Schüler für ihr Gewicht schämen könnten. Aus diesem Grund könnte man mit *anonymisierten Fragebögen* arbeiten oder, weniger umständlich, einfach Zettel, auf denen die anderen ihr Gewicht notiert haben, einsammeln (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 52).

Beispiel 21: **Diese Fichte hat einen Stammdurchmesser von 10 cm. Wie groß ist der Durchmesser ungefähr, wenn die 50 Jahre alt ist?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte C4)

Abbildung 15

Mögliche Lösung: Der Baumstamm hat einen Durchmesser von 10cm und 10 Jahresringe. Das heißt, ein Ring beansprucht insgesamt 1cm im Durchmesser. Also steht 1 Jahr für 1 cm. Mit 50 Jahren wäre der Durchmesser ca. 50cm dick.

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 92)

Einsatz im Unterricht

Dieses Beispiel dürfte den meisten Schülerinnen und Schülern relativ einfach fallen. Aus diesem Grund kann man es durchaus bereits ab der fünften Schulstufe einsetzen. Die meisten sollten schon seit ihrer Kindheit oder spätestens aus dem Biologieunterricht wissen, dass ein Jahresring einem Jahr entspricht. Das bedeutet, dass die Lernenden für die Lösung des Fermi-Problems lediglich ihren gesunden Menschenverstand und ihr *Alltagswissen einsetzen* müssen. Anhand des Bildes können sie die Anzahl der Ringe abzählen und da sie wissen, welchen Durchmesser der Stamm hat, die Breite eines Ringes berechnen. Da sie nun wissen, für *wie viele Jahre ein Ring steht*, und sie wissen wie viele Zentimeter ein Ring insgesamt in Anspruch nimmt, können sie den Durchmesser für 50 Jahre berechnen. (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 92)

Einige Schülerinnen und Schüler könnten anfangs eventuell den Denkfehler, dass ein Ring nur fünf Millimeter beansprucht, machen und somit zu einem falschen Ergebnis kommen. Als Lehrperson kann man diejenigen darauf hinweisen, dass sie den Verlauf des Ringes genauer betrachten bzw. ihn farblich markieren sollen. So werden sie feststellen, dass die Breite eines Ringes verdoppelt werden muss.

Da es vorkommen kann, dass diese Aufgabe für manche Schülerinnen und Schüler eine simple Abzählübung und dadurch rasch erledigt ist, kann man sie, sofern bereits gelernt, den Umfang der beiden Bäume berechnen lassen. Des Weiteren bietet die Fermi-Box eine Zusatzaufgabe, bei der die Lernenden aufgefordert werden, den *Umfang eines abgebildeten Mammutbaumes*, der von einer Frau umarmt wird, zu berechnen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte C4).

Beispiel 22: **Wie groß muss der Parkplatz sein, auf dem alle Autos deiner Stadt parken können?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte D7)

Mögliche Lösung: Angenommen, in Wien wohnen ca. 2 Millionen Menschen. Pro Haushalt leben ca. 3 Personen, wovon eine ein Auto hat:

$$2000000 : 3 \cdot 1 = 666666,66\ldots \text{also ca. } 700000 \text{ Autos}$$

Ein Auto ist ca. 4,5m lang und 2m breit, hat also eine Fläche von 9 m².

$$700000 \cdot 9 = 6300000 \text{ m}^2 \text{ reine Autofläche}$$

Außerdem wird zwischen den Autos einen Meter Abstand und zwischen den Reihen 2 m Abstand berechnet:

$$(3 \cdot 2 + 4{,}5 \cdot 1) = 10{,}5 \text{ m}^2 \ldots \text{ca. } 10 \text{ m}^2$$

$$700000 \cdot 10 = 7000000 \text{ m}^2$$

$$6300000 + 7000000 = 13300000 \text{ m}^2 = \underline{\underline{1330 \text{ ha}}}$$

Der Parkplatz würde einer Fläche von ca. 1500 ha, d.h. 3000 Fußballfeldern entsprechen.

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe setzt *geografisches Wissen* (wegen der Einwohnerzahl) und auch ein Grundwissen über die ungefähre Größe von Autos voraus. Sie kann dazu eingesetzt werden, die Vorstellung von Flächen zu vertiefen und auch *Flächenberechnungen* zu üben. Außerdem kann auch, sofern die Lernenden in einer Großstadt leben, das Rechnen mit großen Zahlen wiederholt werden. Es bietet sich also an, diese Frage in der zweiten Klasse zu stellen. Mit ihr kann der Flächenbegriff wiederholt werden, um ihn anschließend, wie im Lehrplan für Mathematik an allgemeinbildenden höheren Schulen verlangt, zu vertiefen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 116).

Die Aufgabe eignet sich zum Arbeiten in Gruppen, da es für die Schülerinnen und Schüler hilfreich sein kann, ihr Wissen gemeinsam zu nützen bzw. Überlegungen bezüglich der Einwohnerzahl der Stadt und der Größe eines Autos zusammen auszuarbeiten. Unter Umständen kann man den Lernenden ermöglichen, das *Gebäude zu verlassen und parkende Autos und den zusätzlichen Platzbedarf abzumessen* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 116).

Es könnte passieren, dass die Lernenden die Aufgabe unterschätzen und vergessen, Zufahrten und Gänge zwischen den Autoreihen einzuplanen. Aus diesem Grund könnte es hilfreich sein, sie eine Skizze anfertigen zu lassen, anhand derer sie ihre Berechnungen anstellen können. In der Fermibox wird auch vorgeschlagen, ein richtiges *Modell zu bauen, das im Kunstunterricht* fertiggestellt werden könnte (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 116).

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Der Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen besagt, dass die Lernenden ihr *„mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen und durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln“* sollen (Lehrplan AHS - Mathematik UST). Der in diesem Kapitel bearbeitete Aufgabentyp entspricht nahezu exakt dieser Aussage. Denn um Beispiele dieser Art zu lösen, reicht es, das Alltagswissen einzusetzen. Sind die eigenen Annahmen dennoch zu vage, kann eine Informationsquelle herangezogen werden.

Dadurch, dass die Schülerinnen und Schüler bei vielen Fermi-Aufgaben dieser Art ihre eigene Erfahrung einbringen dürfen, kann die Motivation und die positive Arbeitshaltung gesteigert werden. Außerdem wird die Nützlichkeit der Mathematik im alltäglichen Leben ebenfalls gestärkt (vgl. Lehrplan AHS - Mathematik UST). Natürlich werden wahrscheinlich nur vereinzelt Schülerinnen und Schüler einen Parkplatz für alle Autos ihrer Stadt bauen, aber sie können ihr erarbeitetes Wissen beispielsweise bei einer Veranstaltung anwenden, wenn sie Sesselreihen aufstellen müssen.

Des Weiteren eignen sich alltagsbezogene Beispiele zum Differenzieren. Die Schülerinnen und Schüler können selbst entscheiden, mit welcher Komplexität und mit welchem Tempo sie rechnen wollen. So werden leistungsstärkere Lernende mit stärker gerundeten Zahlen rechnen als solche, die mathematisch schwächer sind. Haben die Lernenden eine ausgeprägte Vorstellung von Zahlen, können sie leichter einschätzen, wann sie wie stark runden dürfen, um nicht zu weit vom tatsächlichen Ergebnis abzuweichen. Außerdem kann man die Schülerinnen und Schüler in Gruppen einteilen, sodass sie sich gegenseitig unterstützen können. (vgl. Lehrplan AHS - Mathematik UST).

Hinsichtlich der Bildungsstandards werden folgende Kompetenzbereiche mit Fermi-Fragen, die durch Alltagswissen beantwortet werden, häufig behandelt: H1, H3, H4, I1, I3, K1 – K3 (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10, 11).

Die Schülerinnen und Schüler wandeln ihr Wissen in Modelle um, mit denen sie die Realität beschreiben. Sie vergleichen zum Beispiel die Form eines Autos mit einem Rechteck und können somit ungefähr die Fläche des Wagens berechnen. Um dies überhaupt erreichen zu können, müssen sie die Kompetenz, mathematische Beziehungen zu erkennen, besitzen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Um das Modell bearbeiten zu können, müssen sie *„rechnen und operieren“* (Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Das heißt, die müssen ihre Annahmen in die Tat umsetzen und berechnen. Gleichzeitig müssen sie aber auch begründen können, warum sie welche Lösungsschritte gewählt haben (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10).

Inhaltlich behandeln solche Beispiele häufig das Rechnen mit Figuren und Körpern. Das heißt, die Lernenden müssen häufig Flächen- und

Volumenberechnungen anstellen. Im Zuge dessen müssen sie auch kompetent genug sein, um die entsprechenden Maßeinheiten umzuwandeln. Außerdem müssen die grundlegenden Rechenoperationen beherrschen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

Die Komplexität betreffend, bewegen sich die meisten Beispiele im Bereich K3. Es reicht nicht nur, rechnen zu können. Es ist wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler jeden Schritt in ihrem Lösungsweg überdenken und ihn mit ihrem alltäglichen Wissen kombinieren, auch wenn diese Verbindung nicht immer gleich auf den ersten Blick ersichtlich ist. Sie müssen gegebenenfalls abschätzen, ob ihr Ergebnis realistische Werte repräsentiert und es möglicherweise überarbeiten (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 11).

4.6. Fehlende Informationen durch Messungen und Experimente einholen

Um diese Aufgaben zu lösen müssen die Schüler Gegenstände, Räume etc. selbst abmessen, Zeiten stoppen bzw. Situationen nachstellen, um die nötigen Anhaltspunkte für den Lösungsweg zu erlangen.

Beispiel 23: **Wie oft schlägt dein Herz in einem Jahr? Wie oft blinzelst du im Jahr? Wie oft schluckst du in einem Jahr? Etc.** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte B8)

Mögliche Lösung: Angenommen:

…das Herz schlägt 80 Mal in der Minute: 80 · 525600 = 42048000 Mal im Jahr

…man blinzelt 12 Mal in der Minute (und man schläft 8 Stunden am Tag):

12 · 350400 = 4204800 Mal im Jahr

…man blinzelt 6 Mal in der Minute: 6 · 525600 = 3153600 Mal im Jahr

Einsatz im Unterricht

Bei dieser Fragestellung geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler den Herzschlag, das Blinzeln und das Schlucken *abzählen und anschließend auf eine Stunde oder mehr aufrechnen*. Wie lange diese Zeitspanne sein soll, bleibt ihnen überlassen, aber naheliegend wäre eben eine Minute. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich in dieser kurzen Zeit verzählen ist nämlich eher gering. Nach dem Zählen müssen sie nur noch mit der Anzahl der Minuten eines Jahres multiplizieren (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 76).

Bezüglich des Blinzelns kann es vorkommen, dass die Schülerinnen und Schüler vergessen, dass die Augen während des Schlafens geschlossen bleiben und somit keine 24 Stunden pro Tag angenommen werden sollten. Prinzipiell sind diese Fragen aber eher unkompliziert zu lösen.

Aus diesem Grund wäre es passend, das Beispiel am Anfang der ersten Klasse einzusetzen. Man kann dadurch feststellen auf welchem Wissensstand die Lernenden nach der Volksschule sind und ob sie es gewohnt sind, selbstständig zu arbeiten. Empfindet man die Aufgabe zu diesem Zeitpunkt jedoch zu herausfordernd, bietet es sich an, sie bei Textbeispielen in Verbindung mit Multiplikation in den Unterricht einzubauen.

Als Lehrperson reicht es, den Schülerinnen und Schülern *Stoppuhren* zur Verfügung zu stellen bzw. reicht es, in der Stunde davor darauf hinzuweisen, dass eine Uhr mit Sekundenanzeige mitzubringen ist. Der Rest sollte von ihnen alleine gelöst werden können. Man kann natürlich auch weitere Fragen hinzufügen:

- *Wie oft atmest du in einem Jahr?*
- *Wie oft niest du in einem Jahr?*
- *…*

  (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 76)

Bei der letzten Frage muss man natürlich beachten, dass man teilweise wochenlang nicht niest. Zu sagen, dass man es täglich fünf Mal macht, wäre bei einer gesunden Person wohl eher unrealistisch.

Beispiel 24: **Stell dir vor, du willst dein Zimmer neu streichen. In welcher Farbe würdest du es streichen? Wie viel Farbe brauchst du, wenn 1 Liter Farbe für 6 – 8 m² reicht?** (Maaß 2007: 61)

Mögliche Lösung: Angenommen, die Schülerinnen und Schüler haben ein Zimmer mit den Maßen 4 m x 3 m x 2,5 m abgemessen. Dann ergeben sich folgende Wandflächen und Deckenfläche:

$$2 \cdot (4 \cdot 2{,}5) + 2 \cdot (3 \cdot 2{,}5) + 4 \cdot 3 = 20 + 15 + 12 = 47 \text{ m}^2$$

Davon muss man die Fläche der Fenster (2 je 1 m²) und der Tür (2 m²) abrechnen. Das heißt, 43 m² müssen gestrichen werden.

$$43 : 6 = 7{,}16 \text{ l}$$

Um das Zimmer zu streichen, brauchen die Lernenden 8 l ihrer Lieblingsfarbe.

Einsatz im Unterricht

Diese Fermi-Aufgabe kann bereits in der ersten Klasse zur Vertiefung des Flächenbegriffs und der Multiplikation eingesetzt werden.

Um die Maße für diese Aufgabe zu bekommen, können die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Zimmer abmessen. Das heißt, es bietet sich an, das gesamte Beispiel oder zumindest das ausfindig Machen der Daten als Hausaufgabe zu geben.

Da es *verschiedene Möglichkeiten gibt, das Zimmer zu streichen*, kann man diese im Unterricht gemeinsam besprechen und die möglicherweise sinnvollste gemeinsam noch einmal bearbeiten. Manche Lernenden würden vielleicht das gesamte Zimmer zweimal streichen, andere wieder nur die Wände ohne die Decke etc. (Maaß 2007: 61).

Das einzige, was wirklich beachtet werden muss, und was einige Schülerinnen und Schüler vergessen könnten, ist die Tatsache, dass die Fläche der Fenster und Türen berücksichtigt und abgezogen werden müssen. Als Lehrperson kann man dem entgegenwirken, indem man die Anfertigung einer Skizze verlangt.

Dieser Teil der Aufgabe kann als Fermi-typisch angesehen werden. Der Rest könnte auch in einer beliebigen anderen Aufgabe gefragt sein.

Schülerinnen und Schüler, die durch diese Fragestellung zu wenig gefordert sind, können die Wandfläche ihres Hauses oder ihrer Wohnung berechnen und dafür verschiedene Wandfarben einplanen.

Beispiel 25: **Wie viel trinkt ein Mensch, der 78 Jahre alt wird in seinem Leben? Wie viele Badewannen könnte man damit füllen?** (http://www.schule.winterthur.ch)

Mögliche Lösung: Angenommen, ein Mensch trinkt 2 l am Tag, dann trinkt er:

$$2 \cdot 365 \cdot 78 = \underline{\underline{56940\ l}}$$

Durch Abmessen oder Berechnung kann man herausfinden, dass eine herkömmliche Badewanne ca. 140 l umfasst, also:

$$56940 : 140 = \underline{\underline{406{,}7\ \text{Wannen}}}$$

Man kann also 406 Wannen füllen.

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe eignet sich zum Wiederaufgreifen des Volumenbegriffs bevor man das Volumen von Prismen in der sechsten Schulstufe einführt. Die Frage kann sowohl alleine als auch in Gruppen bearbeitet werden. Sie ist nicht sonderlich anspruchsvoll und kann als Auflockerung der Stunde gesehen werden.

Die Lernenden können zu Beginn anhand ihrer eigenen Erfahrung berechnen, wie viel ein Mensch pro Tag und anschließend im ganzen Leben trinkt. Um den Fermi-Gedanken beizubehalten, können sie eine Badewanne abmessen und anschließend ihr Fassungsvermögen berechnen. Um es aber interessanter zu machen, können sie die Wanne selbst mit Kübeln füllen und ihre eigene Auffassung von einer vollen Badewanne in die Berechnung einbringen.

Geschieht dies zuhause, dann sollte dies nur mit Einverständnis der Eltern geschehen, da ein Vollbad nicht nur Wasser sondern im Endeffekt auch Geld beansprucht.

Im Zuge dieses Beispiels kann man weitere Fragen entwickeln:

- Wie viele Wasser trinkst du mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern im ganzen Leben?
- Wie viel trinkt deine Familie in einem Jahr?
- Wie viele Menschen müssten 2 Liter am Tag trinken, um die Wassermenge des Neusiedlersees zu trinken?
- Etc.

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Diese Art von Aufgabe fördert vor allem die Kreativität der Lernenden und hilft ihnen Bezüge zur Lebenswelt herzustellen (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein und Mathematik). Die Schülerinnen und Schüler können selbst wählen, welche Methoden sie anwenden wollen, um sich die Daten zu beschaffen. Bei Beispiel 18 können sie entweder die Maße der Badewanne nehmen und so ihr Fassungsvermögen berechnen oder sie füllen sie kübelweise mit Wasser bis die gewünschte Füllmenge erreicht ist. Egal welche der beiden Wege die Lernenden wählen, am Ende können sie berechnen, wie viele Badewannen mit der Wassermenge gefüllt werden können. Man muss aber festhalten, dass die zweite Methode eher theoretisch ist, denn nicht jede Schule besitzt eine Badewanne und nicht jede Lehrperson opfert dafür die Unterrichtszeit.

Die Fragen sind sehr lebensnahe, denn es kann durchaus vorkommen, dass man das Volumen einer Wanne oder den Herzschlag messen muss. Natürlich passiert dies selten im Zusammenhang eines Jahres oder Lebens sondern in Situationen wie nach dem Joggen oder beim Einrichten eines Badezimmers etc. Der Bezug zum Alltagsleben der Schülerinnen und Schüler kann sich positiv auf deren Motivation auswirken, da sie erkennen, wo Mathematik für sie sinnvoll angewendet werden kann. Somit wird diese Unerreichbarkeit der Mathematik, die einige Lernenden empfinden, verringert (vgl. Maaß 2007: 16).

Bei den Bildungsstandards bewegen sich Aufgaben, bei denen Informationen durch Messungen und Experimente eingeholt werden können, hauptsächlich in den Bereichen H2, I1, I3 und K1 (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10,11). Es reicht bei diesen Aufgaben häufig, dass die Schülerinnen und Schüler, die Beschaffung der Informationen planen und diese anschließend mittels grundlegender Rechenoperationen anwenden. Deshalb kann man diese Fermi-Aufgaben auch häufig im Komplexitätsbereich 1 einordnen. Inhaltlich befassen sie sich, wie die meisten Fermi-Aufgaben, mit Zahlen und deren Darstellung sowie der konkreten Anwendung von Rechenregeln und geometrischen Begriffen und deren Eigenschaften (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10, 11). Frage 18 kann beispielsweise, sind die Maße bereits vorhanden, mit wenigen Schritten gelöst werden. Außerdem gibt es zur endgültigen Lösung, nämlich die Anzahl der Wannen, nur einen Weg, nämlich die Division der Wassermenge eines Lebens durch die Füllmenge einer Wanne.

4.7. Daten aus vorhandenen Quellen ermitteln

Beispiel 26: **Wie viele Tennisbälle haben Serena Williams oder Roger Federer wohl in ihrem Sportlerleben schon aufgehoben?** (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte G5)

Mögliche Lösung: Beide Spieler sind seit ca. 10 Jahren Profispieler. Da Tennis viel Kondition erfordert, mussten sie täglich trainieren bzw. spielten ein Turnier. Angenommen sie haben 1 Mal am Tag gespielt (Turnier oder Trainingsmatch), dann könnte man folgendes annehmen: 1 Match hat ca. 9 Games/Satz, die 40:15 ausgehen (= 5 Aufschläge und 2 Mal zweiter Aufschlag). 3 Sätze werden gespielt, und die SpielerInnen heben beide gleich oft den Ball auf:

$$7 \cdot 9 \cdot 3 : 2 = 94{,}5$$

Sie haben also fast eine 100 Bälle am Tag aufgehoben.

$$100 \cdot 365 \cdot 10 = \underline{365000 \text{ Bälle}}$$

Sie haben ca. 400000 Bälle aufgehoben.

Die Daten können beispielsweise auf Wikipedia unter den Begriffen *Serena Williams* bzw. *Roger Federer* gefunden werden.

Einsatz im Unterricht

In dieser Aufgabe geht es hauptsächlich darum, dass die Schülerinnen und Schüler ihre *„Grundvorstellungen zur Durchschnittsbildung (Mittelwert) vertiefen“* (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 162). Der Mittelwert wird in manchen Schulbüchern bereits in der ersten Klasse kurz angesprochen, genauer wird er aber erst in der vierten Klasse behandelt (vgl. Lehrplan AHS - Mathematik UST).

Aus diesem Grund kann man die Tennisball-Frage als Einführungsbeispiel für das Berechnen von Mittelwerten nehmen. Es ist hier nämlich noch nicht nötig, den genauen Mittelwert zu berechnen, sondern es reicht, wenn ihn die Lernenden aus ihren ermittelten Daten schätzen. Im Anschluss an das eigenständige Rechnen kann man die Aufgabe und gefundenen Werte nochmals aufgreifen und anhand derer die exakte Berechnung eines Mittelwerts erklären.

Die Schülerinnen und Schüler könnten anfangs Probleme bei der Beschaffung der Daten haben. Die Biografie der beiden Spieler lässt sich rasch eruieren, aber wie oft gespielt und trainiert wird, sind Informationen, für die die Lernenden mehr Zeit investieren müssen. Aus diesem Grund könnte man im Plenum Suchbegriffe finden, die die Recherche erleichtern sollen. Außerdem besteht die Möglichkeit, dass die Lernenden ihre Turnlehrerin oder ihren Turnlehrer befragen. Möglicherweise weiß sie oder er gut über Tennis Bescheid und kann ihnen Auskunft geben.

In der Fermibox wird angeführt, dass der Ball ca. *30 Mal pro Training oder Spiel aufgehoben* wird (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte 162). Es wird jedoch keine Quelle für diese Zahl angegeben. Vergleicht man sie mit dem ausreichend begründeten Teilergebnis aus der Ausarbeitung, nämlich dass der Ball 100 Mal aufgehoben wird, so könnte man daraus schließen, dass irgendeine beliebige Zahl gewählt wurde.

Präsentiert man den Lernenden die Berechnung der Fermibox, könnten diese annehmen, dass sie irgendwelche Werte nehmen könnten, was natürlich nicht erlaubt ist.

Sollte die Lehrperson wissen, dass in einer Klasse ein besonderes Interesse für eine *andere Sportart* besteht, kann die Frage auch auf diese bezogen werden, z.B.: Wie viele Bälle hat Lionel Messi in seiner Zeit als Fußballer bereits aufgehoben? (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 162).

Beispiel 27: **Das Foto zeigt den Fernsehturm am Alexanderplatz in Berlin. Wie viele normale Fußbälle passen in einen solchen „Riesen-Fußball"?** (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte D3)

Abbildung 16: www.ecards4u.de

Mögliche Lösung: Der Durchmesser der Kugel des Turms beträgt 32 m.

$$V = 1/6 \cdot \pi \cdot 32^3 = 17157 \text{ m}^3$$

Der Durchmesser eines Fußballs beträgt Ca. 20 cm. Da zwischen den Bällen ein Abstand bleibt, kann man das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 20 cm für das Volumen des Balles berechnen:

$$V = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3 = 0{,}008 \text{ m}^3$$

$$17000 : 0{,}008 = \underline{2125000 \text{ Bälle}}$$

Es passen also ca. 2 Millionen Bälle in die Kugel des Fernsehturms.

Fernsehturmdaten entnommen aus http://www.tv-turm.de/de/technik.php

Einsatz im Unterricht

Im österreichischen Lehrplan für allgemeinbildende höhere Schulen wurde festgelegt, dass Berechnungen an der Kugel in der vierten und in der siebten Klasse durchgenommen werden. Aus diesem Grund eignet sich dieses Beispiel, das sich größtenteils mit Volumenberechnung an Kugel und Quader befasst, zum Vertiefen bzw. Wiederholen. In der vierten Klasse können die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis von Kugel und Volumen erweitern und deren Berechnung üben.

Haben die Schülerinnen und Schüler ihre Daten gesammelt und begonnen, das Problem zu lösen, kann es, wie auch bei anderen Aufgaben, dazu kommen, dass sie *Schwierigkeiten bei der Umwandlung von Längen- bzw. Raummaßen* haben. Aus diesem Grund sollte man dies kurz wiederholen, bevor man das Beispiel stellt (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 116).

Hat man besonders leistungsstarke Schüler, so kann man die Aufgabe auch zur Differenzierung anwenden. Sie kann durch folgende zusätzliche Fragen erweitert werden:

- *Wie groß wäre das Fußballtor, das zu diesem „Riesen-Fußball“ passt?*
- *Wie groß müsste das passende Fußballfeld sein?*
- *Wie groß ist die aufgeklebte Magenta-Folien-Fläche?*
  (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 116)

Hierbei müssen die Schülerinnen und Schüler noch zusätzliche Flächenberechnungen vornehmen.

Beispiel 28: **Auf eine DVD mit 4,7 GB Kapazität passen etwa 120 Minuten Video. 1 Minute Audio (mp3) belegen ca. 1 MB. Wann etwa werden die Festplatten so groß sein, dass wir unser ganzes Leben per Audio aufnehmen können? Wann reicht es für einen kompletten Videomitschnitt unseres Lebens?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: Karte C16)

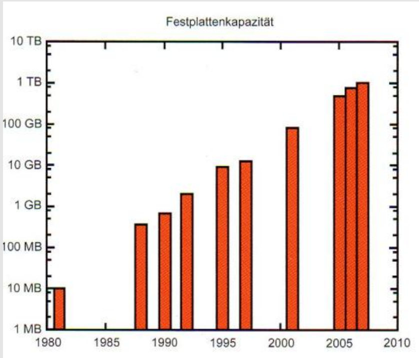

Abbildung 17

Mögliche Lösung: Angenommen, ein Mensch wird 75 Jahre alt, dann lebt er:

$$75 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 = 39420000 \text{ Minuten}$$

Da 120 min einer DVD ca. 5 GB sind:

$$40000000 : 120 \cdot 5 = 1666666{,}67 \text{ GB}$$

$$1700000 \text{ GB} = 1700 \text{ TB} = 1{,}7 \text{ PB}$$

Da sich die Speicherkapazität bisher etwa alle 5 Jahre verzehnfacht hat, würde man zwischen den Jahren 2020 und 2025 ein ganzes Leben als Film speichern können.

Bei einer Audio-CD entspricht eine Minute einem MB:

$$40000000 \text{ MB} = 40000 \text{ GB} = 40 \text{ TB}$$

Eine Audio-CD mit dem gesamten Leben eines Menschen könnte man kurz nach 2015 auf einem einzigen Datenträger speichern.

(vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 102)

Einsatz im Unterricht

Diese Aufgabe kann ab der vierten Klasse einer allgemeinbildenden höheren Schule angewendet werden. Ab diesem Zeitpunkt sollten die Lernenden in der Lage sein, *Graphen zu lesen und auch zu interpretieren und Diagramme zu analysieren*. Außerdem sollten die mit entsprechender Hilfestellung, wie zum Beispiel Umrechnungstabellen, fähig sein, mit *Zeit- und Speichereinheiten* umzugehen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 102).

Setzt man die Aufgabe in höheren Klassen ein, kann man die Schülerinnen und Schüler anstelle von gerundeten Werten auch mit *Zehnerpotenzen oder aber auch mit Binärpotenzen* rechnen lassen. Man kann die Klasse in zwei Gruppen aufteilen. Eine arbeitet mit Zehnerpotenzen, die andere mit Binärpotenzen. Anschließend können die Ergebnisse miteinander verglichen werden und die Genauigkeit der jeweiligen Arbeitsmethode abgeschätzt werden (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 102).

Wie bei den meisten Fermi-Aufgaben gibt es auch hier Erweiterungsfragen, die sich zur Differenzierung im Unterricht eigenen (Henn 2003: 90). Man kann sie im Prinzip allen Schülerinnen und Schülern anbieten, jedoch werden sie wahrscheinlich nur von den leistungsstärkeren genützt werden:

- *Wie viel Audio-/Video- Zeit passt auf deine aktuellen Datenträger?*
- *Wie viele Datenträger hätte man hierfür 1980 benötigt?*
- *Etc.*

  (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse* 2010: 102)

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Hauptaugenmerk der letzten drei Aufgaben liegt darin, dass Schülerinnen und Schüler selbstständig Daten durch den Einsatz von (technischen) Medien erlangen. Der Lehrplan fordert diesbezüglich:

> *Grundsätzlich sind schon ab der 1.Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbänken,…) gegeben. Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen.* (Lehrplan AHS – Mathematik UST)

Das bedeutet im weitesten Sinne, dass es nicht reicht, dass die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Wissen einsetzen, sondern dass sie sich zusätzliche Messwerte, Eigenschaften, Pläne etc. beschaffen müssen, um ausreichende Daten zur Lösung der Aufgabe haben. Dies fördert die Selbstständigkeit und Eigenverantwortung der Lernenden (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein). Je ausführlicher ihre Recherchen desto, genauer werden ihre Annahmen und somit auch ihre Lösungen. Sie können also selbst entscheiden, wie detailliert ihr Endprodukt werden soll. Im Zuge der Datenbeschaffung können die Schülerinnen und Schüler auch auf ähnliche Beispiele treffen, die ihnen dann als Hilfestellung dienen. Das kann zur Folge haben, dass sich mögliche Fragen an die Lehrperson von selbst beantworten und sie die Aufgabe wirklich eigenständig lösen können. Natürlich muss man einräumen, dass dies auch durch andere Aufgaben erreicht werden kann.

Bezüglich Bildungsstandards können bei diesem Aufgabentyp alle 11 Kompetenzbereiche behandelt werden. Dies bedeutet natürlich nicht, dass ein einziges Beispiel alle Bereiche umfasst, sondern lediglich, dass es bei Aufgaben dieser Art vorkommen kann, dass wirklich alle Kompetenzen einmal angesprochen werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen ein passendes Modell finden, mit dem sie die Aufgabenstellung auf Papier bringen können, sie müssen argumentieren, wo ihre Informationsquellen zu finden sind und müssen die Daten mit den entsprechenden Rechenoperationen verknüpfen (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10).

Inhaltlich kann dieser Aufgabentyp viele verschiedene Bereiche behandeln. Es gibt Aufgaben, die mit Geometrie verbunden sind, wie zum Beispiel die Fußball-Frage. Außerdem müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Statistiken richtig zu deuten und Prognosen zu machen bzw. Einheiten von Größen umzuwandeln, wie in Beispiel 21. Wie man aus dieser kurzen Aufzählung von Beispielen entnehmen kann, sind bei diesem Aufgabentyp inhaltlich kaum Grenzen gesetzt. Sie sind grundsätzlich von den Recherchen der Schüler abhängig. Je mehr sie finden, desto mehr Ausgangspunkte zur Lösung sind geboten.

Dies führt auch dazu, dass die Komplexität hier auch innerhalb einer Aufgabe stark variieren kann. Dies kann man besonders gut an Beispiel 19 erkennen. In der gelösten Version wurden ausschließlich Informationen über die Karriere der Spieler eingeholt und der Rest wurde durch persönliche Erfahrungen geschätzt. Es kann aber auch vorkommen, dass manche Schülerinnen und Schüler auf Quellen stoßen, bei denen Tennistraining genauer analysiert wird und möglicherweise sogar grafisch dargestellt wird. Diese Auswertung müsste dann wieder mit den anderen Daten verknüpft werden.

4.8. Ergebnisse durch Experimente erhalten

Beispiel 28: **Wie lang ist der Faden, aus dem ein Pullover besteht?** (Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: Karte E1)

Mögliche Lösung: Die Schülerinnen und Schüler probieren es an einem alten Pulli aus bzw. lösen einen Handschuh aus und berechnen das Größenverhältnis von Handschuh und Pulli. So können sie anschließend die Fadenlänge des Pullovers berechnen.

Einsatz im Unterricht

Um diese Aufgabe zu lösen bedarf es keiner besonderen mathematischen Kompetenzen. Aus diesem Grund kann sie zur Einführung in das offene und selbstständige Lernen in der ersten Klasse verwendet werden, denn dies fällt einigen Schülerinnen und Schülern nach der Volksschule noch recht schwer. Die Schülerinnen und Schüler üben dabei auch das *„Rechnen mit Längen und den zugehörigen Maßeinheiten"* (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 120).

Haben die Lernenden keine alten Stoffe, die sie auftrennen könnten, zur Verfügung, können sie auch *Bekannte, die stricken, fragen*, wie viel Wolle sie durchschnittlich für einen Pulli benötigen. Außerdem finden sich Informationen dazu auch auf der *Banderole*, die den Wollknäuel umgibt. Eine weitere Möglichkeit, die Fadenlänge zu berechnen, ist, *selbst eine gewisse Fläche zu* *stricken* und dann auf einen gesamten Pullover aufzurechnen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 120).

Da dies alles unter Umständen relativ schnell erledigt ist, können die Schülerinnen ihre Messungen selbst korrigieren, indem sie die tatsächliche Fadenlänge als Hausübung mit konkreten Zahlen berechnen. Sie könnten *10 Fäden mit einer gewissen Länge nebeneinander auflegen* und die Breite der Fäden ermitteln. Wenn sie die Fadenlänge dieses Stücks ermittelt haben, können sie auf den gesamten Pullover hochrechnen (vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse* 2010: 120). Eine weitere Möglichkeit wäre, das Gewicht des Pullis zu messen und im Anschluss zu überprüfen wie viele Wollknäuel in etwa gleich viel wiegen. Anhand der Banderole können sie dann ablesen, wie lang ein Knäuel ist und anschließend die Fadenlänge aller benötigten Knäuels berechnen.

Beispiel 29: **Wie viele vollständige Konfettikreise lassen sich mit einem üblichen Locher aus einem A4-Blatt stanzen?** (Herget, Jahnke, Kroll 2009: 34)

Mögliche Lösung: Die Schülerinnen und Schüler probieren es aus und zählen mit.

Einsatz im Unterricht

Wie auch die Aufgabe zuvor, eignet sich diese Aufgabe aufgrund ihrer Trivialität zur Auflockerung des Unterrichts innerhalb eines Stationenbetriebs. Sie kann bereits ab der ersten Klasse eingesetzt werden. Als Lehrperson kann man den Schülerinnen und Schülern die nötigen Materialien, nämlich Locher und Papier, bereitstellen.

Will man das Niveau ein wenig anheben und dass die Lernenden ihr Ergebnis überprüfen, so können sie nachrechnen, indem sie die Kreise durch Quadrate mit Seitenlänge des Durchmessers ersetzen.

Möchte man die Aufgabe in höheren Klassen berechnen, ist dies ab der dritten Klasse möglich. Ordnet man die Kreise nämlich nicht direkt untereinander sondern versetzt an, ergeben sich, wenn man die Mittelpunkte von drei Kreisen verbindet, gleichseitige Dreiecke, die mittels Pythagoras berechnet werden können (vgl. Herget, Jahnke, Kroll 2009: 143).

Beispiel 30: **Wie lange braucht man, um diese SMS mit dem Handy zu schreiben? hi michi, wie geht's? *bin im europapark. super hier. manche bahnen sind echt krass. hdl sabrina*** (Maaß 2007: 56)

Mögliche Lösung: Die Schülerinnen und Schüler können die Zeit stoppen (z.B.: 30 Sekunden)

Einsatz im Unterricht

Wie bereits erwähnt, eignen sich Beispiele, bei denen die Schülerinnen und Schüler experimentieren müssen, meistens für die erste Klasse, da kaum Rechenaufwand vorhanden ist. Dies trifft auch in diesem Fall zu.

Da die Aufgabe wahrscheinlich nach zwei Minuten (lesen, tippen und Ergebnis aufschreiben inbegriffen) erledigt ist, können die Schüler die Zeit auch berechnen und die Lösungen vergleichen. Sie können zum Beispiel annehmen, dass sie pro Zeichen 1 Sek brauchen und aufgrund von *93 Zeichen 93 Sekunden* lang tippen (vgl. Maaß 56). Man muss aber festhalten, dass, wenn man will, dass die Lernenden nicht nur experimentieren, es womöglich sinnvoller wäre, zuerst zu rechnen und dann auszuprobieren.

Man kann sehen, dass die Annahme das Dreifache der tatsächlichen Zeit ist. Somit müssen die Schülerinnen und Schüler überprüfen, ob ihre Schätzwerte gerechtfertigt sind und sie gegebenenfalls ändern. Im Zuge dessen können sie auch die Umrechnung von Zeiteinheiten wiederholen.

Um die Kreativität der Lernenden anzuregen, kann man zusätzlich zu dieser Aufgabenstellung noch folgende geben:

- Wie lange würde man brauchen, wenn man eine Seite deines Lieblingsbuches tippen würde?
- Wie lange würdest du brauchen, um das gesamte Buch per SMS zu schicken?

In beiden Fällen könnten die Schülerinnen und Schüler die erste Zeile tippen, die Zeit nehmen und diese schließlich auf eine Seite oder ein Buch hochrechnen.

Die Verbindung zu Lehrplan & Bildungsstandards

Diese Aufgabe fördert hauptsächlich die Kreativität der Schülerinnen und Schüler, zumindest in Kombination mit Zusatzfragen, wie im SMS – Beispiel oder aber auch bei der Anwendung von nicht offensichtlichen Lösungswegen (zum Beispiel Gewicht des Pullis abwiegen). Der Lehrplan besagt:

> *Den Schülerinnen und Schülern ist Gelegenheit zu geben, selbst Gestaltungserfahrungen zu machen und über Sinne führende Zugänge mit kognitiven Erkenntnissen zu verbinden. Dabei eröffnet sich für sie die Chance, individuelle Fähigkeiten zu entdecken und zu nutzen und sich mit den Ausdrucksformen ihrer Mitmenschen auseinander zu setzen*. (Lehrplan AHS – Allgemein)

Wie aus diesem Auszug unschwer zu erkennen ist, geht es bei dieser Art von Fragestellung, sofern man sie die Schülerinnen und Schüler im Anschluss nicht berechnen lässt, nicht um Mathematik, sondern um die Lernenden selbst. Sie sollen die Möglichkeit haben, ihre kreativen Ideen auch im Mathematikunterricht umzusetzen und sich mit Mitschülern auszutauschen. Im Zuge dessen werden hierbei auch die sozialen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler unterstützt (vgl. Lehrplan AHS – Allgemein). Sie können alleine, aber auch in Paaren und Gruppen arbeiten, ihre Ideen nur präsentieren oder sie auch verknüpfen. Sie lernen, dass Zusammenarbeit, zum Beispiel beim Ausstanzen des Konfettis, auch zeitsparend sein kann. In einem Satz gesagt lernen die Schüler nicht Mathematik sondern den zwischenmenschlichen Umgang.

Bezüglich der Bildungsstandards üben die Lernenden bei diesen Aufgaben hauptsächlich zu argumentieren, also H4 (vgl. Neureiter, Fürst und andere 2010: 10). Wenn sie ihre Annahmen nicht durch ihre konkreten Berechnungen rechtfertigen können (da diese nicht stattfinden), müssen sie dies verbal oder schriftlich tun. Bei den Konfettis können sie beispielsweise die Anordnung ihrer Kreise begründen.

Inhaltlich werden, sofern nicht zusätzlich gerechnet wird, fast ausschließlich Zahlen und Maße behandelt. In den meisten Fällen müssen die Lernenden Experimente machen, deren Ergebnis meist Längen und Zahlen sind. Lässt man sie die Beispiele anschließend berechnen, kommen oftmals geometrische Inhalte, wie Flächenberechnungen, hinzu. Aufgrund der Einfachheit der Aufgaben wird ihnen nur Komplexitätsbereich 1 zugeordnet. Es reicht, wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Grundfertigkeiten einsetzen (vgl. Benesch-Tschanett, Friedl-Lucyshyn und andere 2009: 24, 25)

5. Zusammenfassung

Der Bekanntheitsgrad von Fermi-Aufgaben und auch ihr Einsatz im Unterricht werden vermutlich in den kommenden Jahren immer stärker werden. Für einen guten Unterricht ist es nicht mehr ausreichend, den Schülern Rezepte zum Lösen von Beispielen zu geben, sondern sie müssen lernen, selbstständig zu arbeiten. Die vorangegangenen Kapitel sollten zeigen, dass der Einsatz von diesen offenen Aufgaben nicht unbedingt schwierig sein muss. Im einfachsten Fall dienen sie zur Vertiefung und zur selbstständigen Festigung von bereits Gelerntem. Gibt es in einer Klasse sehr leistungsstarke Schüler, so können diese anhand von einfachen Fermi-Aufgaben neue Themengebiete selbst erarbeiten.

Wie man aus den Beispielausarbeitungen entnehmen konnte, sind die Aufgaben eher für den Einsatz in der Unterstufe geeignet. Es gibt zwar Fragen, die für die Oberstufe gedacht sind, doch die Auswahl ist eher gering. Der Grund dafür ist, dass Themengebiete wie Zahlen und Maße, die man häufig in

Verbindung mit Geometrie lösen kann, behandelt werden. Natürlich könnte man sie aufgrund von verschiedenen Komplexitätsstufen für beinahe alle Schulstufen zugänglich machen, aber ab einer gewissen Klasse wäre das wohl nicht mehr sinnvoll, da die Themengebiete zu sehr vom Lehrplan abweichen würden.

Zusammenfassend kann man behaupten, dass Fermi-Aufgaben den Unterricht auflockern und interessanter gestalten können und gleichzeitig auch mathematisches Wissen fördern und vermitteln. Ihr Einsatz kann also durchaus eine Bereicherung für Lehrperson und Lernende sein.

6. Literatur

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Benesch-Tschanett, G., Friedl-Lucyshyn, G. und andere. *Bildungsstandards für höchste Qualität an Österreichs Schulen*. 2009. Wien: bifie

Bernardi, C. und Bonolis L. *Enrico Fermi: His Work and Legacy.* 2001. Bologna: SIF.

Breit, A., Friedl-Lucyshyn, G. und andere*. Bildungsstandards in Österreich. Überprüfung und Rückmeldung*. 2010. Salzburg: bifie

Büchter A., Herget W., Leuders T., Müller J.H. *Die Fermibox 5. – 7. Klasse*. 2010. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Büchter A., Herget W., Leuders T., Müller J.H. *Die Fermibox 8. – 10. Klasse*. 2010. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Greefrath, Gilbert. *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. 2010. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Henn, Hans-Wolfgang. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*. 2003. Hildesheim und Berlin: Verlag Franzbecker.

Herget, W., Jahnke, T., Kroll W. *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1*. 2009. Berlin: Cornelsen Verlag.

Maaß, Katja. 2007. *Mathematisches Modellieren*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG

Neureiter, H. C., Fürst, S und andere. *Praxishandbuch für „Mathematik“ 8.Schulstufe*. 2010. Graz: Leykam

ELEKTRONISCHE QUELLEN:

http://de.academic.ru/dic.nsf/meyers/97266/Neusiedler (Neusiedlersee, Stand: 14.07.2011)

http://de.wikibooks.org/wiki/Mensch_in_Zahlen (Stand: 21.06.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Byte (Stand: 30.06.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Chicago (Stand: 15.04.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi (Stand: 1.04.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem (Stand 1.04.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/John_Dewey (Stand: 17.06.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgeschwindigkeit (Stand: 30.06.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Roger_Federer (Stand: 14.07.2011)

http://de.wikipedia.org/wiki/Serena_Williams (Stand: 14.07.2011)

http://www.bewegung.ac.at/index.php?id=88, (Maße Turnhalle, Stand: 04.07.2011)

http://www.bifie.at/sites/default/files/items/PISA-Mathematik.pdf (Stand: 15.07.2011)

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.xml (Kundmachung Oberstufe. Stand: 15.04.2011)

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml (Kundmachung Unterstufe, Stand: 15.04.2011)

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11668/11668.pdf (Lehrplan allgemein, Stand: 15.04.2011)

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (Lehrplan Mathematik Oberstufe, Stand: 15.04.2011)

http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (Lehrplan Mathematik Unterstufe, Stand 15.04.2011) http://www.bmukk.gv.at/medienpool/791/ahs16.pdf (Lehrplan Physik, Stand: 01.07.2011)

http://www.ecards4u.de/karte.php?user=sampler777&action=create&card=berlin_wm/fernsehturm_ball.jpg (Bild Fernsehturm, Stand: 05.07.2011)

http://www.icopal.at/upload/icopalat/prospekt%20bitumenschindel%20standard.pdf (Dachschindeln, Stand: 15.07.2011)

http://www.mckinsey.de (McKinsey & Company, Stand: 17.07.2011)

http://www.mckinsey.com/careers/how_do_i_apply/how_to_do_well_in_the_interview/~/media/Files/McKinsey%20Problem%20Solving%20Test%20%20%20Practice%20Form%202011_V4.ashx (Einstiegstest, Stand: 17.07.2011)

http://www.promath.tsn.at/07wettbewerbe/pisa_aufgaben/pisa04.pdf (Sammlung aller freigegebenen PISA-Mathematik- Aufgaben, Stand 29.06.2011)

http://www.schule.winterthur.ch/upload/file/Fermi_Aufgaben.pdf (Fermi-Aufgaben, Stand, 05.07.2011)

http://www.schaefer-shop.at/shop/abfallbehalter-60-liter/2,3408,736,10081365,0,0/ (Mülleimer, Stand: 04.07.2011)

http://www.tv-turm.de/de/technik.php (Volumen Fernsehturm, Stand: 06.07.2011)

http://www.rechenbaer.de/bruno_konzept/bruno_konzept/fermi01.html (Stand: 01.04.2011)

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Fermi-Aufgaben, einer speziellen Form von Sachaufgabe, die hauptsächlich durch Alltagswissen und Menschenverstand gelöst werden soll, und deren Einsatz im Unterricht mit Bezugnahme auf den österreichischen Lehrplan für allgemeinbildende Schulen und den Bildungsstandards für Mathematik.

Der erste Teil befasst sich mit dem Leben des Erfinders dieses Beispieltyps, nämlich Enrico Fermi, und beschreibt im Anschluss, was genau unter Fermi-Aufgaben zu verstehen ist, wozu sie dienen und wie sie in den Unterricht eingebaut werden können.

Im zweiten Teil erfolgt eine Rechtfertigung für den Einsatz der Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht anhand vom Lehrplan für AHS und den Bildungsstandards. Fermi-Fragen sind zum momentanen Zeitpunkt noch in keinem Schulbuch explizit vertreten, dennoch erfüllen sie in vielen Punkten die Anforderungen des Lehrplans und der Bildungsstandards für Mathematik.

Der letzte Teil der Arbeit beinhaltet eine Ausarbeitung ausgewählter Fermi-Fragen. Es wird diskutiert, in welcher Schulstufe die Aufgaben eingesetzt werden können und für welche Sozialform sie sich eigenen. Da die meisten Lernenden noch nicht mit dem Umgang mit Fermi-Aufgaben vertraut sind, können Probleme und Schwierigkeiten auftreten. Im Zuge der Ausarbeitung soll auf diese hingewiesen werden und Lösungsvorschläge geboten werden.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Anna Ebersdorfer
Geburtsdatum, -ort:	22.08.1985, Wien
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Familienstand:	ledig

Studium:

10/2005 – 08/2011	Lehramtsstudium für die Unterrichtsfächer Mathematik und Englisch an der Universität Wien
03/2004 – 07/2005	Diplomstudium Anglistik und Amerikanistik an der Universität Wien
10/2003 – 01/2004	Medizin an der medizinischen Universität Wien

Schulbildung:

09/1995 – 06/2003	Gymnasium Neusiedl am See
09/1991 – 07/1995	Volksschule St. Andrä am Zicksee

Berufstätigkeit:

09/2010 – 07/2011	Halbe Lehrverpflichtung an der Europamittelschule Strasshof an der Nordbahn